クロネッカーの数論の解明

Ｉ．解明の基本構想

高瀬　正仁（九大理）

〔目次〕

１．はじめに

数学者クロネッカーの名の記憶は古く、「クロネッカーの青春の夢」という美しい言葉の響きとともに、数学という学問に深く心を寄せ始めてまもない十代の終わりのころまでもさかのぼることができるように思う。クロネッカーはガウスに始まるドイツ数学史の山脈を形成する高峰の一つであり、数学者列伝には欠かせない人物なのであるから、小堀憲『大数学者』（新潮社）、Ｅ．Ｔ．ベル『数学を作った人々』（東京図書）等々、書店や図書館で気軽に目にしうるたいていの近世数学史に登場するのは蓋し当然である。そうしてそれらの書物を手に取れば、クロネッカーはあるいはヴァイエルシュトラスやカントールの数学思想上の敵対者として、またあるいは、類体論の建設を通じて「クロネッカーの青春の夢」の解決を導いた高木貞治の先駆者として語られるのが常であった。数学上の業績はさぞかしと思わせるに足る風情はもとより十分すぎるほどに感じられたが、それればかりではなく、クロネッカーは何かしら非常に独自な数学思想家のようであり、あまつさえその思考様式は常に「青春の夢」の甘美さを漂わせ、濃厚なロマンティシズムの香りに包まれているように思われた。オイラーの巨大さ、ガウスの偉大さ、アーベルの可憐さ、ガロアの悲惨さ、ヴァイエルシュトラスの堅実さ、それにデデキントの思弁性やリーマンの神秘性などと並んで、クロネッカーから受ける印象はロマンティシズム、しかも晦渋なロマンティシズムだったのである。

ところがひとまず数学史を離れて具体的に数学そのものの勉強を進めていくと、不思議なことにクロネッカーの全体像はとりとめもなくかすんでいくばかりであった。クロネッカーをめぐって交わされる数学上のうわさ話は確かに必ずしも少なくはなかったが、それらはほとんどいつでも間接的であり、しかもむしろ消極的な評価へとつながりかねないものが多かった。たとえば、クロネッカーが語ったという、「整数は神の創造物であり、他の数は人間が作ったものである」という主旨の言葉は、「数学の本質はその自由性にある」とするカントールの叫びに比していかにも偏狭であり、頑迷固陋の感を免れがたいであろう。楕円関数論の分野では、「青春の夢」を口にしながらもみずからの手で解決しえたわけではなく、解決をめざして試みられたという膨大な晩年の連作「楕円関数の理論」のうわさは耳にしたものの、なお完成の域には遠いという印象をぬぐいさることができなかった。さらに、代数的整数論の基礎理論、わけてもイデアル論の構築に際しては、デデキントの理論の斬新な簡明さに対して、クロネッカーの理論は容易に正体を捕捉しがたい複雑さの故に、敬して遠ざけられなければならなかった。クロネッカーの名を冠する数学用語（「クロネッカーのデルタ」、「クロネッカーの指数」、「クロネッカーの積」等々）、公式（「クロネッカーの極限公式」、「クロネッカーの合同関係式」等々）、定理（「クロネッカーの近似定理」、「（有理数体上のアーベル数体の構成に関する）クロネッカーの定理」等々）にもしばしば遭遇したが、総じて印象は散漫であり、全体を一人の数学者のもとへと帰一せしめるだけの濃密な有機的連関が存在するようには思われなかった。見聞する事柄が増していけばいくほど、数学者クロネッカーの輪郭は逆に次第に曖昧になっていった。その間、時期により多少の濃淡の差こそあれ、クロネッカーへの関心はとぎれることなく持続したが、より深い認識への道が開かれようとする気配はついに見えないままであった。

さて、二十代のころ、岡潔の多変数関数論の勉強を通じて、数学という学問は数学的自然を対象とする自然学の一分野、すなわち数学的自然学であり、その数学的自然の本体は本質的に時間的契機を内包する歴史的観念であるという考えを抱くに至った。このような考えによれば、数学と数学史は分かちがたく融合している一個の有機体であり、その結果、数学のよりよい理解を願う気持ちは自然に数学史研究の意欲へと転化していったのである。そこで昭和５７年（１９８２年）の春、いよいよ本格的に数学史への道を踏み出そうと決意して、大まかな見取図の作成に取り掛かった。ただちに決断がなされたのは、ともあれガウスの大著『アリトメティカ研究』（この邦訳名は私見によるものだが、ほかにも種々の提案がなされている。結局、単に『整数論』とするのが最も簡明のようである）から始めるという一事のみだった。続いてアーベル、ヤコビ、アイゼンシュタイン、クンマー、ディリクレ、リーマン、ヴァイエルシュトラス、デデキント、クロネッカー、ヒルベルト等々、いずれ劣らぬ大数学者たちの巨大な全集群を前にして、取り組むべき作品をひとつひとつリスト・アップ

する作業を進めたが、名を知るのみで見たことのない傑作が目白押しであり、その総量はたちまちのうちに４０００，５０００，６０００・・・頁へとふくれあがっていくのであった。まことに目の眩まんばかりのきらびやかな情景だったが、数学と数学史は一体であるという観点に立脚している以上、このような状勢は取りも直さず数学的知識の極端な欠如を示しているのであり、さすがに内心忸怩たるものを禁じえなかった。すなわち、数学史への着眼とともに、ここに初めて数学の勉強が真に始まるのだという鮮明な感慨を得たのである。

一般化と問題解決とを主要な関心事とする現代数学の趨勢に倦み果てて久しかったおりから、この古文書解読計画は数学的生命の再生への期待を荷なうに足る生き生きとした活力を十二分に備えていた。だが、ここにはただ一点だけ、何かしら不吉な行く末を暗示する黒点が存在し、しかもその処遇の如何はいつか必ず大計画の帰趨を左右する一大事となるにちがいないと思われた。それがクロネッカーであった。この数学者以外の大数学者たちについては、ガウスでもアーベルでも、なるほど遺漏なく精密に理解するには膨大な量の時間と労力を要するであろうとしても、がんばればなんとかなるという予感があった。しかしクロネッカーだけはちがっていた。ほとんどの論文が未知のものであることに当惑させられて、リスト・アップの段階ですでに大きな困難を覚えたこともさることながら、どの論文を観察しても、「とうてい理解できそうにない、丹念に読んでもおそらく何もわかるまい」としか感じられなかったのである。なぜひとりクロネッカーのみが例外的であるのか、もちろんこの時点では知るすべもなかったが、ともあれこの「おそらく理解できまい」という感情は論理と本質の双方にまたがって、広くクロネッカーの世界全体を覆っていた。何よりもまずほとんどすべての論文は容易に論理的追随を許さないであろうという気がしたが、たとえ、連作「楕円関数の理論」の場合のように、幸いにも普通の（これは、クロネッカー以外の、という意味である）論文を読むのと同様の仕方で論理の連鎖を追っていくことが可能であるように思えたとしても、その本質、すなわち、真実の意図の洞察となると、手がかりとなりうるものは依然として何も見えそうにないのであった。

玉城康四郎先生（仏教学者、東大名誉教授）は道元のわかりにくさについてこんなふうに語っている。

> 道元がわたしの心に影を落としはじめたのは、いつのころであったろうか。仏教を学ぼうとするものが、道元に関心を持つのは当然であるかもしれないが、かれとのそのころのかかわり方には、いささか特殊な雰囲気があったように思う。
>
> 日支事変の起こる前に高等学校の生活を楽しんだものにとっては、人生を語り、芸術を論じ、何とはなしに哲学にあこがれるという思考が、青年の心をとらえて放さなかった。それは全部ではなくても、大部分のものが同じような方向に向いていたことが、特別の共同体意識をつくり

上げていたようである。語りあい論じあうことにおいて、芸術や人生の在り方がすでにわれわれの掌中につかまれているような錯覚をおぼえ、青春の目覚めが、情熱と自覚との未分の状態のなかから、はっきりと立ちのぼっていく光景を、生まれかわったような気概で享受したものである。

そうした雰囲気のなかで、カントやヘーゲルの名が口にのぼり、ニーチェやキルケゴールが語られたが、もとより原書を見ているわけではなかった。これらの名前にまじって、道元の名がわれわれの心に浮かんでいたのである。心に印せられた人物の配列からいえば、道元は、空海や親鸞などとではなく、カントやヘーゲルと並んでいたことは、いかにも奇異である。この組み合せは、大学へ進んでも変わることはなかった。おそらく、和辻哲郎教授の論著「沙門道元」の影響が及んでいたことは疑いを入れまい。道元は、近代哲学にも比べられるような、すぐれた思弁を包んでいるということが、かれへの接触の最初の印象であったように思う。

しかしながら、カントやヘーゲルは、学べば理解できるという予感があった。なるほどかれらの指さすところの世界は深遠ではあっても、ことばをたどっていけば意味は通じそうである。しかし道元は、学んでもおそらく理解できまいという危惧の念が先立っていた。『正法眼蔵』の巻を開けば、ただちに共感はできる。しかも不思議な言葉の魅力がたたえられている。しかし、その境地はたちまちに雲煙のかなたに飛び去り、凡識の及び得ないところで、ひたすら語っているのである。［『日本の名著７　道元』（中央公論社）所収「道元思想の展望」より］

幾年か前、このような玉城先生の言葉に初めて触れたとき、驚きと感銘と喜びがこもごもわきおこり、心から共感を禁じえなかった。私のクロネッカーはそのまま玉城先生の道元のようであった。玉城先生が道元について言うように、クロネッカーもまた「学んでもおそらく理解できまいという危惧の念が先立っていた」が、クロネッカー全集の各巻をひもとけば、どの頁を見ても「不思議なことばの魅力がたたえられて」いた。だが、「その境地はたちまちに雲煙のかなたに飛び去り、凡識の及び得ないところで、ひたすら語っている」のであった。クロネッカーの解読作業は今日もなお著しい進展を見ないままの状態に留まっている。しかしそれはそれとして、私はここで、クロネッカー以外の数学者たち、特にガウスとアーベルとアイゼンシュタインとクンマーの解読の成果を踏まえたうえで、クロネッカー全集の中の不思議な魅力をたたえている言葉の数々を丹念に拾っていくことにしたいと思う。そうしてそのような作業の中から、クロネッカー解明の基本構想がおのずと立ち現われてくることを期待したいと思う。

2. クロネッカーの諸論文における特異モジュールの諸相　（1）特異モジュラー方程式の二性質．アーベル方程式であること、および不分岐であること．

クロネッカーの数学的思索の中には、手に手を携えてつねに全体を統御する働きを示す二つの変数、「顕わな変数」と「隠れた変数」が存在すると私は思う。顕わな変数とは**特異モジュール**を指し示す言葉であり、隠れた変数の意味するものは**相互法則**（本稿では、単に相互法則といえばつねに冪剰余相互法則を意味する）にほかならない。特異モジュールの働きをさまざまな角度から究明し、その究明の成果に立脚しつつ、相互法則に向けて大きな一歩を運ぼうとする数論的世界。それがクロネッカーの世界である。そこで私はまず特異モジュールという顕わな変数に着目し、この変数がクロネッカーの諸論文の中でさまざまな変奏を繰り拡げていく様子を概観したいと思う。この変奏は特異モジュラー方程式の二性質（アーベル方程式であること、および不分岐であること）に始まり（本節）、単項イデアル定理およびアーベル方程式の構成問題との関わりへと進んでいく（第3節）。そうして最後に、相互法則という隠れた変数がわずかに浮上して、陰陽二つの変数の軌跡が瞬時に交叉する場面が出現する（第4節）であろう。そのかすかな情景を目にしえたとき、我々のクロネッカー論はようやく基本構想の糸口をつかむことができるのである。

さて、特異モジュールに関するクロネッカーの究明において決定的な契機となったのは、アーベルの楕円関数論であった。１８５７年の論文「虚数乗法が生起する楕円関数について」（全集, Ⅳ, ｐｐ. １７９－１８３）の冒頭で、クロネッカーはアーベルから受けた影響に触れて、みずから次のように語っている。

> アーベルの論文*)（全集, Ｉ, ｐ. ２７２**)）の中に、虚数乗法が生起する楕円関数のモジュールはすべて冪根を用いて書き表わされる、という所見が見いだされる。しかしアーベルがそのような特別の種類の楕円関数の、この注目すべき性質を発見するに至った方法についての示唆は欠如している。この発見が起こったのはまさしく論文「楕円関数研究」の起草の後のことであったという事実は、この論文の中の一節（全集, Ｉ, ｐ. ２４８.***)　またはクレルレ誌, Ⅲ, ｐ. １８２）から明らかになる。そこではなお、上に言及されたモジュールを定める方程式の可解性に対して疑念が表明されているのである。―――一番初めに挙げたアーベルの所見に刺激され、私はその証明を見つけようとする意図を持って、この前の冬に、****)　虚数乗法が生起する楕円関数の研究に打ち込

んだ。そうしてその折に、私は探し求められていた証明のほかにもなお、多くの興味ある結果を見いだした。それらのうちのいくつかをここで手短に報告したいと思う。［全集，Ⅳ，p．179．太字の語句「後の」に対応する原語はイタリック体で記されて強調されている。］

*）「楕円関数の変換に関するある一般的問題の解決」（全集，I，pp.403－428）

**）ここで言われているアーベル全集はホルンボエが編纂した旧版（1839年）を指す。現行の全集（1881年）の第一巻，p．426参照。

***）同上。現行の全集の第一巻，p．383参照。

****）1856年の冬。

虚数乗法が生起する楕円関数のモジュール。それが特異モジュールである。そうして特異モジュールはある代数方程式を満足し、しかもその方程式、すなわち**特異モジュラー方程式**（これは私が仮に与えた名称である）は代数的に可解である。アーベルは多少の逡巡の後にそのような認識を明確に表明した。クロネッカーの研究はこのアーベルの言明に証明を与えようとする試みから出発したのである。研究の成果はめざましく、特異モジュラー方程式はアーベル方程式である、言い換えると、特異モジュールは虚二次数体上の相対アーベル数体を生成するという著しい事実の発見に到達した（ここにはアーベルの代数方程式論が反響している）。クロネッカーの報告は下記の通りである。

nは3よりも大きな正奇数を表わすとしよう。さらに楕円関数のモジュールをκで表わし、その平方をkで表わそう。すると、$\sqrt{-n}$による楕円関数の乗法が可能であるようなkの相異なる値、すなわち，$\sin^2\mathrm{am}(\sqrt{-n}u, \kappa)$が$\sin^2\mathrm{am}(u, \kappa)$と$\kappa$との有理関数として表示されうるようなkの値の個数は、判別式－nに所属する相異なる二次形式の類の個数の6倍に等しい。これらのkの値はすべて、それらのうちのどれか一つの値のエクスプリシットな代数関数である。そのうえそれらはある整係数方程式の根である。その方程式の次数はkの値の個数に等しい。また、この方程式は、判別式－nに所属する相異なる目（もく）と等個数の整係数因子に分解する。これらの目のどれに対しても、上記の方程式のある定まった因子が所属する。その因子の次数は該当する目の中に含まれている類の個数の6倍に等しい。最後に、正式原始目に所属する因子は、整数と$\sqrt{n}$のみを含む係数を有する6個の等次数因子に分解可能である。従って、これらの6個の部分方程式の次数はどれも、判別式－nに所属する正式原始類の個数に等しい。そうしてこれらの部分方程式の一つには、可解性の特色が最も明瞭に現われている。すなわち、そ

の方程式の諸根は、それらはすべてそれらの一つの（整係数のみを含む）有理関数として表示可能であり、しかも、そのような二つずつの関数 $\phi(k)$ と $\psi(k)$ に対して方程式 $\phi\psi(k)=\psi\phi(k)$ が成立する、という性質を有するのである。**もしｎが素数で、しかも－ｎは二次形式の判別式として正則であるとするなら、言及された部分方程式はアーベル方程式である。**そのほかのあらゆる場合には、その方程式の特殊な性質、その諸根の周期の個数、等々、は、判別式－ｎに対する種の個数と非正則性指数に依存する。［全集，Ⅳ，ｐｐ．１７９－１８０．「虚数乗法が生起する楕円関数について」より。太字による強調は私が行なった。また、二次形式の類、正式原始類、目（もく）、正式原始目、種、正則な判別式、非正則性指数などの用語は、ガウスの二次形式論（『アリトメティカ研究』第五章）の中で用いられているものである。］

特異モジュラー方程式には、アーベル方程式であるという性質と双璧をなすと目される、もう一つの著しい性質が認められる。それはこの方程式の不分岐性、すなわち、その判別式は単数を除いて本質的因子を含まないという性質である。クロネッカーはこれを次のような言葉で報告している。

$\sqrt{-n}$ による乗法が生起する特異モジュールは――ｎ≡３もしくは１(mod. 4)であるのに応じて――ｋもしくはｋ（１－ｋ）に対する方程式を通じて定められる。その方程式の係数は、ｎに含まれている個々の素因子の平方根から作られている。また、その方程式の次数は、判別式－ｎの正式原始形式の、ある同一の種に所属する類の個数に等しい。［全集，Ⅳ，ｐ．２１１．「楕円関数の虚数乗法について」より］

上記の部分方程式と二次形式の個々の種との間には、どの種に対してもある定まった部分方程式が対応し、その種の中に含まれている個々の二次形式類に対して、その方程式のある定まった根が対応するという、いっそう精密な関係が見いだされる。［全集，Ⅳ，ｐ．２１１．同上］

上記の部分方程式に関して私の念頭を離れることのなかった最も困難な問題の一つは、その既約性に関するものであった。・・・整係数方程式の既約性に関する従来の証明法は、ほとんどすべて、判別式に含まれている本質的素因子の性質に基づいている。ところが、**$\sqrt{-n}$ による乗法に所属するモジュールが依拠する上記の部分方程式の判別式は、ある種の例外を除いて、単数以外の本質的素因子を全く含まない。**私は上記の方程式のこの注目に値する性質を帰納的に発見したにすぎず、いまだに一般的に証明することはできないでいる。［全集，Ⅳ，ｐ．２１３．同上。太字による強調は私が行なった。］

下記の言葉の中では、特異モジュラー方程式の不分岐性が、「特異モジュールは虚二次数体上に相対不分岐数体を生成する」という表現様式をもって語られている。

> ・・・私がすでに1862年6月のベルリン学士院月報，p.368,*) において言及したように、**楕円関数の特異モジュールの種は、ある一定の平方根を添加するとき——そのとき、モジュールの方程式はいくつかの部分方程式に分解していくが——、もはや「種の判別式」をもたない**という、注目すべき性質を有する。［全集，Ⅱ，p.269. 「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」より。太字による強調は私が行なった。］
>
> *) 1862年6月のベルリン学士院月報には、クロネッカーの論文「楕円関数の虚数乗法について」が掲載されている。同月報，pp. 363—372.

こうして特異モジュールは虚二次数体上に相対不分岐アーベル数体を生成する。これが**ヒルベルトの類体**の原型である。ヒルベルトはクロネッカーの発見それ自体を定義として流用し、力のある特異な数学的概念を得たのである。

3. クロネッカーの諸論文における特異モジュールの諸相（2）単項イデアル定理とアーベル方程式の構成問題

特異モジュールには虚二次数体のイデアルを単項化する力が宿っている。この力の発見を語るクロネッカーの言葉に耳を傾けよう。

> 私が初めて楕円関数の特異モジュールの研究に専念していたころ、そのときすでに、私はこの［随伴種の究明という］問題の重要性に気がついていた。［全集，Ⅱ，p.322. 「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」より］
>
> 楕円関数の虚数乗法の研究に専念していたころ（1856年冬）、負整数の平方根の種に随伴する代数的数の種が、指示された通りの仕方で私

> の眼前に現われたとき、それは全く新しい、驚くべき、そうして興味ある現象であった。**種√－ｎに付随するこのような種Γは**、私がすでに１８５７年１０月の月報の中に印刷されている報告*)において強調しておいたように、クンマーの命名に従うならば、**種√－ｎのすべての理想因子を供給する。**種Γの位数は種√－ｎの類数に等しい。そうして一般に、種√－ｎの、合成および類の分配に関する深い諸性質はすべて、随伴種Γの初等的な諸性質の中に、いわばコピーをもっているのである。この例に教えられて、私は複素数に関する私の諸論文を、この問題を解決してそれらを真に完成することが可能となる日までは発表するべきではないと思った。まさにそのために、私はクンマーの言葉の引用の中で言及されている論文発表も、その当時、さしひかえたのである。しかし、最近、すなわち前年の初めに、**種√－ｎに随伴する種の性質のアプリオリな認識、すなわち解析的な起源に依存しない把握**に到達し、それと同時にこのような種類の随伴に関する一般的な問題の研究のための視点を獲得したときに、私は今や、他の方法の吟味も踏まえたうえで（序文参照）、代数的な量と数を取り扱う私の方法をここで早々に展開しようと決意した。［全集，Ⅱ，ｐｐ.３２３－３２４． 同上。太字による強調は私が行なった。］

ここには明記されてはいないが、「種√－ｎに随伴する種Γ」とは、虚二次数体 Ｋ＝Ｑ(√－ｎ）の数を虚数乗法子とする楕円関数の特異モジュールが、Ｋ上に生成する新たな数体Γのことである。クロネッカーの主張に従うならば、そのΓはＫの随伴種となり、ＫのイデアルはΓの中ではいっせいに単項化されてしまうのである。

上記の引用文では、「種√－ｎに随伴する種の性質のアプリオリな認識、すなわち解析的な起源に依存しない把握に到達し、それと同時にこのような種類の随伴に関する一般的な問題の研究のための視点を獲得した」と言われている。これは代数的整数論におけるクロネッカーの理論（主論文は大作「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」，全集，Ⅱ，ｐｐ.２３９－３８７）の真意の所在を端的に物語る貴重な言葉である。おそらくヒルベルトはこのようなクロネッカーの言葉の深い影響の中からまずヒルベルト類体、すなわち不分岐類体の概念を抽出し、続いてそのヒルベルト類体における単項イデアル定理の成立という、極めて簡明な情景（「随伴種のアプリオリな認識」はこれで実現されている）を想定したのではあるまいか。こうして特異モジュールに関するクロネッカーの研究は、類体というものの原型を与えるばかりではなく、同時に類体の一般理論、すなわち類体論の実質的な起源とみなすことができるのである。

さて、イデアルの単項化という、特異モジュールに備わっている独特の力の認識に続いて、我々はこの力が真に発揮されるべき固有の場所を探したいと思う。クロネッカーは全集中のただ一箇所において、そのような場所の所在を示

唆している。その場所こそ、クロネッカーの世界に偏在するロマンティシズムの源泉、あの青春の夢にほかならない。特異モジュールの働きの真実の意味は、クロネッカーの青春の夢の考察の中で初めて解き明かされるのである。そこでその解明の様相を観察するために、クロネッカーの言葉に即しつつ、一般的な視点からアーベル方程式の構成問題——青春の夢はこの問題の一区域をなしている——に目を向けたいと思う。

まずクロネッカーはこう言っている。

> どの整係数アーベル方程式の根も、１の冪根の有理関数として表わされる。［全集，Ⅳ，ｐ．１０．「代数的に可解な方程式について」より］

これはいわゆるクロネッカーの定理であり、ここでは整係数アーベル方程式は全体として円周等分方程式によって汲み尽くされることが主張されている。この言明のすぐ次に来る言葉は下記の通りである。

> その係数がａ＋ｂ√－１という形の複素数のみを含むようなアーベル方程式の根と、レムニスケートの分割の際に現われる方程式の根の間にも、類似の関係が存在する。そうして究極的には、この結果をいっそう広範に、その係数が、一定の代数的数に由来する非有理性を含むようなすべてのアーベル方程式に対して一般化することが可能である。［全集，Ⅳ，ｐ．１１．同上］

この言葉の前半で語られている事柄は、クロネッカーの青春の夢の一部分をなす命題である。ここでは、ガウス数体を係数域とするアーベル方程式は、全体としてレムニスケート曲線（またはレムニスケート関数）の等分方程式によって汲み尽くされることが主張されている。これに対して、後半部の言葉の中で表明されている状勢は完全に一般的であり、ある代数的数体を任意に指定するとき、その数体を係数域とするすべてのアーベル方程式を生成する一定の構成様式が存在すると言われている。ここではっきりと打ち出されているのはアーベル方程式の構成問題そのものにほかならないが、さらにクロネッカーは、真に驚くべきことに、その解答をも手中にしていることを示唆している。ただしアーベル方程式の構成様式というものの実体は必ずしも明確ではない。クロネッカー論の立場からは、円周等分方程式やレムニスケート等分方程式、あるいは青春の夢における「特異モジュールをもつ楕円関数の変換方程式」（引き続く引用文における青春の夢の表明参照）を包摂するものとして考えられている、ある一般的なものを明らかにするべく努力しなければならないであろう。この最後の問いに対して、ヒルベルトは「与えられた数体に附随するある一定の解析関数系の特殊値が満足するアーベル方程式系」をもって答えようとした。それがヒルベルトの第12問題である。

さて、クロネッカーは１８８０年3月１５日付のデデキント宛書簡の中で、「**最愛の青春の夢**」をこんなふうに語っている。

> この数箇月間、私はある研究に立ち返って鋭意心を傾けてきました。この研究が終結に至るまでにはなお多くの困難が行く手に立ちはだかっていたのですが、今日では最後の困難を克服したと信じます。そのことをあなたにお知らせするよい機会と思います。それは私の**最愛の青春の夢**のことです。詳しく申し上げますと、整係数アーベル方程式が円周等分方程式で汲み尽くされるのと同様に、**有理数の平方根を伴うアーベル方程式は特異モジュールをもつ楕円関数の変換方程式で汲み尽くされる**という事実の証明のことなのです。［全集，Ｖ，ｐ．４５５．太字による強調は私が行なった。］

即座に問題となるのはこの青春の夢の解決法だが、それについてクロネッカーが同じデデキント宛書簡の中で表明している見解は瞠目に値する。我々はクロネッカーの言葉に虚心に耳を傾けたいと思う。

> 私は先ほど申し上げた定理*)の証明を長い間おぼろげに心に描いて探し求めてきたのですが、そのためにはなお、特異モジュールに対するあの注目すべき方程式の本性に対する、ある全く別の――そのように申し上げてよろしいかと思います――哲学的洞察が私にとっては不可欠でした。その哲学的洞察の力をもって、このような方程式はなぜ――クンマーの表記法（私はそれを１８５７年にも報告**)の中で使用しました）によりますと――ａ＋ｂ$\sqrt{-\mathrm{D}}$に対する理想数に具体的な姿を与えるのに過不足のない無理量をもたらすのかという、そのわけが明らかにされなければなりませんでした。［全集，Ｖ，ｐ．４５６］

*)「青春の夢」を指す。
**)「１８５７年の報告」は「虚数乗法が生起する楕円関数について」を指す。

上述のように、特異モジュールには虚二次数体のイデアルをいっせいに単項化する力が宿っているが、ここに引用した言葉によれば、クロネッカーはこの事実の発見に続いてなお一歩を進め、なぜこのような力が存在するのかという形而上的な問いの究明へと移ったようである。そうして青春の夢の解決のためには、この問いに対する解答を我々に教示してくれる、何かしら超越的な性格を有する洞察力が不可欠であるというのである。不思議な魅力をたたえてやまない数々のクロネッカーの語録の中でも白眉とも言うべき言葉であり、特異な数学思想家としてのクロネッカーの面目が躍如とするかのような場面である。

アーベルの深い影響のもとに出発したクロネッカーの特異モジュール研究はここに大団円を迎え、青春の夢との親密な関わりの中で、その真意の所在が明るみに出されたのである。［ただし歴史はクロネッカーの思惑どおりには進行せず、高木貞治が最終的に類体論を完成させて青春の夢を解決したとき、その解法は単項イデアル定理とは無関係であった。そのためにこの定理は類体論の体系の中でひとつの孤立したエピソードとしての位置を占めるにすぎないことになり、その結果、この定理に対する上記のようなクロネッカーの謎めいた認識は、今日もなお意味不明なままに放置されているのである。］

青春の夢をそのみごとな雛形として包摂するアーベル方程式の構成問題は、クロネッカーの代数的整数論の基本的動因であった。クロネッカー自身、論文「代数的量のアリトメティカ的理論の概要」の序文の冒頭で、その間の事情をこんなふうに説明している。

> 代数的および数論的研究に関する同時代の仕事に導かれて、私はすでに早い時期から、代数学のアリトメティカ的側面を特別に注視しなければならないという見解に達していた。そこでアーベル方程式の根から形成される複素数の研究は、ある有理域におけるすべてのアーベル方程式の構成という、代数的—アリトメティカ的問題へと私を導いたのである。
> ［全集，Ⅱ，p.２４５］

すでに見たように、クロネッカーの代数的整数論の中には相対アーベル数体に関するある種の一般理論——そこには今日の類体論へと向かう力が内在している——が萌していたが、上記のような言葉によりそのような理論の意味もまた明瞭に看取されるであろう。すなわち、何かしら類体論の名に値する理論を建設し、その基盤の上にアーベル方程式の構成問題（あるいは同じことだが、相対アーベル数体の構成問題）の解決をはかること。それが代数的整数論におけるクロネッカーの基本構想だったのである。

ヒルベルトからウェーバー、高木貞治へと、代数的整数論の歴史は大略クロネッカーの指針に沿う形で推移していった（ただし、理論叙述の枠組みとしてはデデキントが開発したものが採用され、クロネッカーの手になるものは顧みられなかった）。それは普通、類体論形成史として語られることの多い数学史的現象である。そうして最終的に高木貞治によって規定された類体の一般概念を土台に据えるとき、「任意の相対アーベル数体は類体である」という、類体論におけるいわゆる逆定理が成立する。しかしこれはそれ自体としてはいわば縦のものを横にしたような出来事にすぎず、これによって別段アーベル方程式の構成問題がすっかり解決されたというわけではない。だが、これだけのことではあっても、その威力は絶大だった。実際、この逆定理を踏まえて、まず高木貞治自身の手でクロネッカーの青春の夢が解決された。続いてアルティンの相互法則が出現し、その結果、ガウス以来の懸案であった冪剰余相互法則は完

全な形で確立されるに至ったのである。

次節（第４節）で述べるように、私見によればアーベル方程式の構成問題の真意は相互法則にあるのであるから、たとえこの問題自体はなお未解決であるとしても、我々の目には、類体論の成立により代数的整数論におけるクロネッカーの構想はほぼ実現されたかのように映ることであろう。もし考察の範囲を代数的整数論に局限するならば、このような判断は完全に正しいと私も思う。しかし我々が今そうしているように、クロネッカーの数論の解明という全的な立場に立脚するのであれば、全容の解明のためにはこれだけでは片手落ちである。我々はなお一歩を進めて、アーベル方程式の構成問題における解析性の働きをめぐって深刻な考察を積み重ねていかなければならない。なぜなら、数論的世界の中で決定的な契機として作用する解析性の働きこそ、クロネッカーの世界の本質を規定する、あの香り高いロマンティシズムの源なのであるから。この最後の論点については、最終節（第５節）であらためて言及したいと思う。

４．特異モジュールと相互法則

ひとつの本質的な問いがなお残されている。クロネッカーの言葉によれば、アーベル方程式の構成問題は代数的―アリトメティカ的、すなわち代数的であるとともにアリトメティカ的であるとも言われていた。この問題が代数的である道理は見やすいが、さらにアリトメティカ的でもあるという言葉に接すれば、だれしも違和感を禁じえないのではあるまいか。そこで我々はこのクロネッカーの不可解な言葉の意味をここで考察したいと思う。

有力なヒントはすでにガウスの円周等分論の中に現われている。ガウスは『アリトメティカ研究』の緒言の末尾で円周等分論に言及し、「円周等分の理論もしくは正多角形の理論は、なるほど**それ自身**はアリトメティカに所属するものではない。しかしそれにもかかわらず、その**諸原理**はひとえに高等的アリトメティカから汲み取られなければならないのである」（ガウス全集，Ｉ，p. ８．太字の語句に対応する原語はイタリック体で記されて強調されている）という不思議な言葉を書き留めている。そうして私の見るところによれば、ここで言われている円周等分論の「諸原理」という一語の意味は、ガウスを促してこの理論の形成へと向かわせるに至った根本的動因のことと解するのが至当であり、しかもそれは平方剰余相互法則の中に隠されている。すなわち、ガウス自身が明らかにしたように、円周等分論の中には平方剰余相互法則の証明の基本契機が見いだされる（ガウスの第四、第五、第七証明参照）が、円周等分論はまさしくこの事実の故にアリトメティカ的であると言われるのである。

さて、ガウスの円周等分論は「円周等分方程式はアーベル方程式である」と

いう基礎的認識から出発する（ただし、もちろん、アーベル方程式の一般概念が表明されているわけではない）が、さらにクロネッカーの定理によれば、円周等分方程式は整係数アーベル方程式の構成問題に対してその完全な解決を与えるのであった。それ故、アーベル方程式の構成問題はアリトメティカ的であるとするクロネッカーの言葉は、その本質的な部分においてガウスの言葉とよく共鳴していると考えられるのである。それならば、クロネッカーの言葉の真意もまた相互法則の中に隠されているのではあるまいか。すなわちクロネッカーは、アーベル方程式の構成問題の解決はおのずと冪剰余相互法則の証明原理として機能する、と考えていたのではあるまいか。これが私のクロネッカー論の土台をなす二つの仮説のうちの一つである（これを**第一基本仮説**と呼びたいと思う。もう一つの仮説については第５節参照）。

私の仮説を支持する役割を果たすであろう、有力な間接的証拠が存在する。それはヒルベルトの類体論である。既述のように、ヒルベルトは特異モジュールに関するクロネッカーの研究の中からヒルベルト類体、すなわち不分岐類体の概念を取り出したが、そのねらいは、不分岐類体の力により冪剰余相互法則に関するクンマーの研究の限界を乗り越えることであった。そうしてそのヒルベルトの意図はフルトヴェングラーや高木、アルティンの手で当初のもくろみをはるかに越える形で成就され、類体の一般概念の確立を通じて「任意の相対アーベル数体は類体である」という状勢認識――既述のように（前節参照）、この状勢認識はともあれアーベル方程式の構成問題（あるいは同じことだが、相対アーベル数体の構成問題）に対して一定の解答を与えている――が可能となったとき、そのとき初めて冪剰余相互法則の理論が完成した。それ故、類体論形成史とは、とりもなおさず、代数的整数論におけるクロネッカーの構想を形あるものにしようとする、大掛かりな試みの軌跡にほかならない。現実に生起した数学史の様相は、第一基本仮説に対して高い蓋然性を与えていると考えられるのである。

ここでアイゼンシュタインの研究を想起したいと思う。アイゼンシュタインはレムニスケート関数の理論を応用して四次剰余相互法則の新証明を得たが、クロネッカーの念頭には、ガウスの円周等分論とともに、つねにこのアイゼンシュタインの研究があったのではないかと私は思う。クロネッカーの定理は平方剰余相互法則に対するガウスの第四、第六、第七証明の証明原理を与えているが、同様に、ガウス数体上のアーベル方程式の構成問題に関するクロネッカーの言明（第３節参照）は、アイゼンシュタインによる四次剰余相互法則の証明に対して、その証明原理として機能する。ヒルベルトの類体論はこのような状勢の延長線上に自然な形で立ち現われてくるのである。

クロネッカー全集の中には、私の仮説を支える働きを示すであろうと思われる、唯一の直接的証拠が存在する。それは論文「ある種の複素数の冪剰余について」（全集，Ⅱ，ｐｐ．９７－１０１）の中の次のような言葉である。

すでに非常に早い時期に、オイラーは、ある定まった判別式Dをもつ二次形式の素因子はある一定の一次式mD＋αに包含されるという観察を行なっていたが、１７８３年になって初めて、彼はこの数論にとって極めて豊饒な観察を注目すべき仕方で定式化した。相互法則という名称はその由来をその定式化の様式に負っているのである。その際に――正当にも――つねに特別に重視されていた相互関係の美しさのあまり、そのとき以来、元来のオイラーの観察の意味と目的はかなり背景にしりぞいてしまった。ところが、近ごろ、**特異モジュールのアリトメティカ的理論の、複素数の冪剰余への応用**にあたって、私はある特異な新しい現象に直面したが、それは即座に、オイラーが二次相互法則の本質的内容を公に語った、あの最初の言い回しを想起させるのである。そうして冪剰余の理論におけるこの現象は、単にこの理論の歴史的出発点との類似性によりそのような回想に誘われるという点においてばかりではなく、この理論の展開の途次、新しい段階へと向かうためのヒントを通じて先行きを展望するという点から見ても、特に興味深いものである。そこで私は本日、学士院にこの現象に関する手短な報告を行ないたいと思う。
［全集，Ⅱ，ｐ．９７．太字による強調は私が行なった。］

「特異モジュールのアリトメティカ的理論［これは青春の夢を意味すると考えるのが至当である］の、複素数の冪剰余への応用」に際して、クロネッカーが直面したある特異な新現象。それは冪剰余の理論に所属する現象であり、しかも平方剰余相互法則の本質を語るオイラーの言葉に通うところがあると言われている。我々の推定を裏付けるに足る、真に決定的な言明と言わなければならないであろう。

さらに同じ論文の中には、「新現象」の報告の後に、

・・・そうして冪剰余の理論のいっそう進んだ展開に向けての明確な指示を、クンマーの研究では除外された場合に対しても含んでいるのは、まさにこの状勢なのである。［全集，Ⅱ，ｐ．１００］

という注目すべき言葉も認められる。冪剰余相互法則に関するクンマーの研究の及ぶ範囲は無制限なのではなく、正則な場合、すなわち、相互法則の舞台として設定される円分体に「正則」という一条件が課される場合に限定されていた。そこでこの限界を打破して、「クンマーの研究では除外された場合」、すなわち非正則な場合に対しても相互法則を確立しようとすることが問題となるが、上記のようなクロネッカーの言葉に依拠するとき、クロネッカーの特異モジュール研究ははっきりとその方向を指向していたと明言することが許されるのではあるまいか。そうしてヒルベルトの類体論により、この方向へと向かう道は実際に踏破されたことも、ここで想起されなければならないであろう。か

くして間接的証拠の信憑性はますます高まり、直接的証拠と相俟って、我々の第一基本仮説の堅固な成立基盤を構成するのである。

5．クロネッカー論の構想

代数的整数論におけるクロネッカーの構想は類体論の建設を通じて相当によく実現されたとみられるが、クロネッカーの数論の全容の解明のためにはこれだけでは不十分であり、事の真相はなお封印されていると言わなければならない。なぜなら、ひとつにはアーベル方程式の構成問題は依然として決定的な解決をみていないからであり、またひとつには、クロネッカーの数論の世界に内在する解析的契機の意味がまだ明らかにされていないからである。ところで、もしヒルベルトの第１２問題の立場に立脚するならば、これらの二論点は統一的視点のもとに論じられ、あらゆる困難は一挙に解消されてしまうであろう。実際、そのとき、アーベル方程式の構成問題はいつでも一系の解析関数を通じて解決されることになり、その結果、円関数や楕円関数やモジュラー関数がクロネッカーの数論的世界の中で果たす役割は、自然に諒解されるようになるからである。ではクロネッカー自身の念頭にあったものは何か、という問いが当然問われなければならないが、クロネッカーはおそらくヒルベルトの第12問題における情景をすでに心に描いていたであろうと私は思う。この推測は、第一基本仮説とともに、私のクロネッカー論の根幹をなす仮説である（これを**第二基本仮説**と呼びたいと思う）。

あるやなきやというほどのか細い仮説だが、私のクロネッカー論の成否はひとえにこの仮説の実証にかかっている。そこで私は、たとえ痕跡なりとも、文献上に現われている直接的証拠を見つけだすべく努めなければならなかったのである。困難な作業だったが、幸いにもただ一つだけ、下記のような小さな、しかし明瞭な根拠が存在する。出典は青春の夢と同じく１８８０年3月１５日付のデデキント宛書簡である。

> 私はいよいよ、これまでに獲得された事柄を解明して、それらを書き留めておく仕事に取り掛からなければなりません。そうしますと、さらに歩を進めて一般の複素数に対しても**特異モジュールの類似物**を見つけるという事柄を要点なりとも片付けておきたいのではありますが、この望みは少々延期することにしなければなりません。 ［全集，Ｖ，ｐ．４５７．太字による強調は私が行なった。］

クロネッカーの定理から青春の夢を経て、今ここに一般の複素数に対する

「特異モジュールの類似物」が語られている。断片的な隻語にすぎないとはいえ、この夢のような数語は優にヒルベルトの第１２問題の原風景とみなしうるのではあるまいか。

こうして長い考察の末に、ようやくクロネッカーの数論的世界の基幹線が浮き彫りにされてきたように思われる。おおよそこんなふうに言えばよいであろう。すなわち、**まず**（たとえば今日の類体論のような）**相対アーベル数体に関するある種の一般理論を建設し、次にその理論を駆使して**（細かく言えば、単項イデアル定理が中心的役割を果たすような仕方で使用して）、**ヒルベルトの第１２問題の要請に応える形でアーベル方程式の構成問題を解決し、最後にその成果に基づいて相互法則の理論を完成すること**、というふうに。数学史は基本的にはおおむねこの基幹線を中軸として展開したと考えられるが、致命的な難点はヒルベルトの第１２問題が（青春の夢の解決を例外として）すっぽりと抜け落ちていることである。そこで私は、クロネッカーの諸論文の解読作業を通じて上記の基幹線の存在を実証し、特に、数論的世界の中で本質的な意義を担って作用する解析性の働きを明らかにしたいと思う。それがクロネッカーの数論の解明における私の基本構想である。

［附記］

１．クロネッカー論そのものからは多少離れるが、最後にヒルベルトの数論について一言しておきたいと思う。本論の叙述方針から看取されるであろうように、私の見るところでは、ヒルベルトこそ、数論におけるクロネッカーの最も直接的な継承者である。実際、ヒルベルトの数論の骨格は類体論による冪剰余相互法則の確立（第９問題のテーマ）と、解析関数系の特殊値による相対アーベル数体の構成問題の解決（第１２問題のテーマ）から成るとみられるが、本論の第２～４節で詳細に論証したように、このような構想はその淵源をクロネッカーの数論的世界の中に有している。その外観こそデデキント様式に限無く覆われているものの、ヒルベルトの数論にはクロネッカーの数学的生命が生き生きと脈打っているのである。だが、これらの二つの数論はもとより完全な相似形ではありえず、ヒルベルトの第９問題と第１２問題の中に象徴的な姿で現われているように、本質的な相違点もまた存在する。ヒルベルトの場合、これらの二問題は個別的に提示されていて、両者を結び合わせている親密な相互関係については、別段関心が払われている様子は見られない。歴史的には第９問題は第１２問題とは無関係に解決されるに至ったのであるから、純粋に論理的な視点から見る限り、ヒルベルトの見通しはそれはそれで正鵠を射ていたと評されてしかるべきであろう。しかし私の目には、ヒルベルトがこのように分離した二問題は、それらの本来の故郷であるクロネッカーの数論的世界の中では、分かちがたく融け合って一個の数学的事象を形成しているように思われた。そこには第９問題の解決に当たって本質的な仕方で作用する第１２問題の働きという、真に魅惑的な局面が確か

に認められ、我々はそのような認識を通じて初めて、青春の夢に表象されるクロネッカーのロマンティシズムを掌中にすることができるであろう。おおよそこのような展望のもとに、私はクロネッカー論の成否を「（一般の複素数に対する）特異モジュールの類似物」という一語に託して、本稿において上記の予感を論証しようと試みたのである。

2．随所で言及したように、クロネッカーの念頭にはたえず「相対アーベル数体に関するある種の一般理論」の構想が明滅していたであろうと思われるが、その理論と今日の類体論との間の具体的な関係については独自の論証が必要である［この論点への着眼は杉浦光夫先生（津田塾大学）の御教示による］。なぜなら、類体論の中にクロネッカーの数学的生命が宿っていることは本論において詳述したとおりだが、クロネッカーの影響が今日の類体論の構成様式それ自体へも及んでいたかどうかという点はなお定かではないからである。私の見るところでは、そのような直接的もしくは具体的な影響もまた確かに存在し、おそらく虚数乗法が生起する楕円関数と二次形式類群との関係に関するクロネッカーの考察（論文「虚数乗法が生起する楕円関数について」参照）の中に、そのかすかな痕跡を見いだすことができるであろう。だが、このような論証はもはや解明の基本構想を離れてすでにクロネッカー論の本論に所属するテーマであり、本稿で提示された他の諸論点とともに、今後の課題として受け止めていかなければならない。

—— 平成5年（1993年）1月11日 ——