シュヴァレーの群論 I

杉浦光夫(津田塾大)

§0 シュヴァレーの数学

この小論は、シュヴァレーの群論の研究内容を把握し、群論の研究史の中での位置付けを考えることを目標とする。

シュヴァレー(Claude Chevalley, 1909-1984)は、17才でエコール・ノルマル・シュペリユール(ENS)に入学した。そしてJ. エルブラン(1908－1931)と友人になり、共に代数的整数論という、当時のフランスでは研究する人の全くいなかった分野の研究を始めた。この分野はガウス以来殆んどドイツだけで研究されていたが、1920年高木貞治が一般類体論の体系を作り、1927年アルティンが一般相互法則を証明してそれを完成させた。このアルティンの仕事は、シュヴァレーのエコール・ノルマル在学中のことであった。シュヴァレーは、1931－32年にハンブルグのアルティンの下に留学した。1940年までのシュヴァレーの仕事は殆んどすべて類体論に関するものである。高木は類体論について次のように述べている((56)序文)。「類体論の成果は、基本定理、分解定理・同型定理(相互律)、存在定理、いずれも極めて簡

単明瞭であるに反して、その証明法は、上記諸家の努力にも拘らず、今なお迂餘曲折を極め、人をして倦厭の情を起さしめるものがある。類体論の明朗化は、恐らくは新主脚点の発見に待つ所があるのではあるまいか。」シュヴァレーのこの方面の研究は、証明の簡易化と共にこの「新主脚点」の発見を目ざすものであったといえよう。シュヴァレーの群論を対象とするこの小論では、彼の数論の成果（例えばイデールの導入，局所類体論の自主的基礎付け，類体論の算術化等）については これ以上触れない。これについては、彌永（33）（附録又，類体論の成立），デュドンネ・ティッツ（25）を参照。

1938 年以来シュヴァレーはプリンストン大学に滞在していたが、39 年第二次大戦が始まり、結局彼は、戦争中アメリカに止まることになって、米国市民権も得た。48 年からコロンビア大学教授となり、1953／54 年には、フルブライト交換教授として来日し、名大および東大で講義を行った。1955 年にはフランスに帰り、パリ大学教授となり、78 年定年で退職するまで、その職にあった。1939 年類体論の算術化の論文を完成して以後のシュヴァレーの研究は、群論と代数幾何に専ら向けられた。（1941 年以後シュヴァレーは、ヴェイユの依頼（ヴェイユ全集 I. p. 578 (62)）によって発表した短い論文（J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 36 − 44（高木記念号））以外には数

論の論文を発表していない。この方面の関心を失ったわけではなく，名大では類体論の講義をしている。）シュヴァレーの代数幾何の研究には，ヴェイユの刺戟が影響しているようである。（ヴェイユ全集 p I. p.559）。シュヴァレーは，ヴェイユとは独立に，任意体上の代数多様体の局所環の基本的諸性質を導き（Ann. Math. 42（1941），また独自の交点理論を構成した（Trans. AMS 57（1945））。シュヴァレーは，フランスに帰ってからH. カルタンと共同で代数幾何学のセミナーを行い（1955/56），また1958年には「代数幾何学の基礎」というセミナーを行っている。

シュヴァレーの群論の論文は，既に1930年代からある（[1]，[2]）が，本格的研究は，1940年頃から（つまりアメリカ滞在が長期化してから）始まる。それはリー群と代数群を対象とするものであった。（末尾のシュヴァレーの群論関係文献表の内[1]だけは，そのどちらでもない。[1]はある種の可算無限群の性質を，フックス群として実現することによって証明するという内容の論文である。）初期の1940年代の研究は，リー群・リー環を対象とし，当時のリー群論の諸問題を多面的に追求して成果を収めた。

これらの研究の当初から，シュヴァレーは線型代数群とリー群論，リー環論の関連に注目していた（レプリカ理論・次中

双対定理）が、1951年以後の研究では、代数群が前面に出て来る。そうしてこの方面でシュヴァレーは、複素単純リー環から出発して、任意の体上の（分解型）単純代数群（シュヴァレー群）を構成し［25］，また任意の代数的閉体上の単純線型代数群の分類に成功した［27］。この二つの仕事がシュヴァレーの群論研究の頂点である。

このⅠでは、リー群の研究のみを扱い，Ⅱで代数群と関連する研究を扱うことにする。シュヴァレーのリー群の研究は、多面的であり，リー・キリング・カルタン・ワイルによって展開されてきたリー群論の殆んどすべての局面に触れている。以下これを次の六項目に分けて述べることにする。項目の後の［3］のような番号が、この論文の最後につけたシュヴァレーの群論関係著作目録の番号である。

1　リー群の大域理論　　［9］

2　レプリカの理論　　［6］［7］［8］［10］［18］［24］

3　二つの存在定理と共役定理　　［5］［12］［13］

4　例外リー群（環）・スピノル　　［14］［19］［20］［22］

5　リー群の位相　　［4］［11］［15］［23］［26］

6　ヒルベルトの第五問題　　［2］［3］［17］

この外シュヴァレーのリー群論の研究成果の中で論文としてシュヴァレーが発表しなかったものがある。そのようなものと

して次の四つを挙げておく。末尾の引用文献の岩澤(36) Lemma 3.11 (p. 525)は実半単純リー環Lの随伴群の岩澤分解を与えるもので，半単純リー群論の基本的構造定理である。脚註に記されているように、(4)におけるこの証明はシュヴァレーによるものである。また岩堀(38)では「連結半単純リー群Gの任意の二つの極大コンパクト部分群はG内で共役である」というE.カルタンの定理のシュヴァレーによる証明が紹介されている。またヴェイユ(62)では、ファイバー空間の微分幾何学を研究しつつあったヴェイユの質問に答えて、半単純リーGの原始的不変コサイクルの形に対する一つの命題の証明をシュヴァレーが与えている。またコシュール(41)にもシュヴァレーの定理が一つ述べられている。

§1　リー群の大域理論

リーの連続変換群Gとは、有限個の実または複素パラメタによって規定される$\mathbb{R}^n$（または$\mathbb{C}^n$）の開集合の解析的な（十分滑らかならよい）変換の作る群（または群芽）であった。パラメタの動く範囲は、一般論では明確に規定されていない。それを正確に規定することは、多様体概念の未成熟な当時にあっては不可能であった。n次元多様体の概念は、周知のように1854年のリーマンの就職講演「幾何学の基礎をなす仮定

について」において始めて提出された。しかしそこでは、n次元多様体は「n重に拡がったもの」としてそのイメージは与えられているが、今日の数学でいうような正確な定義は述べられていない。その意味を確定して行くことが、以後の数学の一つの課題となったのである。

ポアンカレは、位相幾何学の出発点となった1895年の「位置解析」とその補遺(45)において、$\mathbb{R}^n$においてp個の独立で微分可能な方程式によって、$n-p$次元多様体を定義し、そのホモロジー論を展開した。ポアンカレはそのホモロジー論のあいまいな点、問題点をヘーゴール(学位論文1898年・仏訳 Bull. Soc. Math. France, 44 (1916))に指摘され、第一補遺(1899)でホモロジー論を胞体分割の与えられた多面体(複体)に対して展開することにした。

またヒルベルトは、1902年に発表した2次元のユークリッド幾何と双曲型非ユークリッド幾何の群論的基礎付け(32)において、数平面の領域に対し各点Aのまわりの近傍系$\mathfrak{U}(A)$として、Aを含むジョルダン領域(ジョルダン閉曲線の内部)のある集合$\mathfrak{U}(A)$を考えた。即ちヒルベルトは彼の幾何学を展開すべき「平面」として、このような「近傍系」の与えられた数平面の部分集合Xを考えたのである。このときヒルベルトは、この意味のAの近傍系$\mathfrak{U}(A)$は次の条件をみたす

ものと仮定した。

1. $U \in \mathfrak{U}(A)$ で，$A \in V \subset U$ なる V がジョルダン領域ならば $V \in \mathfrak{U}(A)$ である。

2 $U \in \mathfrak{U}(A)$，$B \in U \Rightarrow U \in \mathfrak{U}(B)$

3 X の任意の二点 A, B に対し $B \in U \in \mathfrak{U}(A)$ となる U が存在する。（ここでもう一つの条件として次の4が必要であろう。）

4 $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(A) \Rightarrow {}^{\exists}U_3 \in \mathfrak{U}(A), U_3 \subset U_1 \cap U_2$ ）

2次元位相多様体（面）の最初の定義は，ワイル（64）の「リーマン面の理念」（1913）で与えられた。その定義は次の通りである。「2次元多様体 $\mathfrak{F}$ が与えられているとは次のことを意味する。$\mathfrak{F}$ の点と呼ばれるもののある集合が与えられて居り，$\mathfrak{F}$ の各点 P に対して，$\mathfrak{F}$ の点から成るいくつかの集合が P の近傍として指定されている。$\mathfrak{F}$ の点 P_0 の近傍 $\mathfrak{U}_0$ は，必らず P_0 を含み，かつ $\mathfrak{U}_0$ をある円板 K_0 の上へ一対一に写す写像 φ で $\varphi(P_0)$ が円板の中心となるようなものが存在し，しかもこの写像 φ は，次の二つの性質 1，2 をみたす：

1. $P \in \mathfrak{U}_0$ で，$\mathfrak{U}$ は P の近傍で $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_0$ とすれば，$\varphi(P)$ は $\varphi(\mathfrak{U})$ の内点である。

2 $K \subset K_0$ となる円板 K の中心を $g = \varphi(P)$ とすれば，P の近傍 $\mathfrak{U}$ であって $\varphi(\mathfrak{U}) \subset K$ となるものが存在する。」

ワイルは「リーマン面の理念」第2版（1923）の巻末において、上の定義にさらにもう一つの次の条件を附加することが必要であると述べている。

「3. $\mathcal{F}$ の各点 p のどの二つの近傍に対しても、その双方に含まれる p の近傍が存在する。」

ワイルは初版でヒルベルトと同じ点を見過していたのである。

この頃まだ位相空間論は萌芽期にあった。近傍系による位相空間の正確な定義が始めて与えられたのは、ハウスドルフ(31)の「集合論綱要」(1914)においてであり、この本はワイルの本の翌年に出版されたのである。ワイルは面の上では、連続函数の概念は定義されるが、微分可能函数や解析函数は定義できないことを注意して解析函数がうまく定義できる面即ちリーマン面の定義に進む。

n 次元の C^k 級多様体（$0 \leqq k \leqq \infty$ または $k = \omega$）の概念は、ヴェブレン・ホワイトヘッド(61) 1932で与えられた。これは内容上、今日の定義と一致するが、位相空間という概念を明示的に用いていないので、ややまわりくどい表現となっている。ともあれ1930年代にはケアンズ(9)(1935)によって（$\mathbb{R}^n$ へ埋め込まれた）微分可能多様体が単体分割を持つことが示され、またホイットニー(68)((1936)によって、n 次元微分可能多様体は、$\mathbb{R}^{2n+1}$ に埋め込むことができることが示されるな

ど、微分可能多様体の基本的な性質が確立されていったのである。

一方リー群を大域的多様体としてとらえる視点は、ワイル(64)(1925/26)で打出され、ワイルは特にその立場からコンパクト半単純リー群の基本群の有限性や積分公式を導き大きな成果を挙げた。しかしワイルは大域的リー群論の教科書を書こうとはしなかった。ワイルの著書(67)「典型群──その不変式と表現」は、代数的な取扱いに傾斜し、指標公式の証明のためにリー群的手法も用いたもののリー群論そのものの系統的展開はされなかったのである。同じ頃ポントリャーギンは(48)「連続群」(1938)を出版した。この本は前半で位相群、後半でリー群を扱っている。しかしそのリー群論の部分は、古典的なリーの理論を変換群でないリー群について述べ位相群と結びつけたものであった。

こうして多様体論の基礎の上に大域的リー群論を展開するという仕事は、シュヴァレーが[9](「リー群論I」1946)で行うまで手がつけられないままに残っていたのである。[9]では実解析多様体の理論を展開した後、連結リー群(解析群)Gを実解析多様体(連結と仮定している)であって、群演算が解析的となるような群として定義する。

そしてG上の左不変ベクトル場の全体を$\mathfrak{g}$と置くと、$\mathfrak{g}$は

ベクトル場の括弧積に関し実リー環で $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ となる。$\mathfrak{g}$がGのリー環と呼ばれるものであり $\mathfrak{g} = L(G)$ などと記す。これがリーの第三基本定理の大域化であり、それはG及び$\mathfrak{g}$の定義から直ちに導かれる。同様に連結リー群Gのリー部分群H（Gの部分多様体となっているようなリー群）に対しては、自然な埋め込み $i: H \to G$ により、$L(H)$ は $L(G)$ の部分リー環となることが直ちに証明される。

リー理論の要となる第三基本定理の逆定理に当るものを、シュヴァレーは次の二つの命題に分解して考えた。それは

定理 1　連結リー群Gのリー環$\mathfrak{g} = L(G)$の任意の部分リー環$\mathfrak{h}$に対し、Gの連結リー部分群Hで、$L(H) = \mathfrak{h}$ となるものが唯一つ存在する。

定理 2.　任意の有限次元実リー環$\mathfrak{g}$に対し、連結リー群Gで $L(G) \cong \mathfrak{g}$ となるものが存在する。

定理2は、リー環$\mathfrak{g}$は忠実な有限次元表現を持ち、従って$\mathfrak{g}$は$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$の部分リー環と見なされるという1934/35年のAdoの定理(2)を用いて定理1に帰着するというのがシュヴァレーの方針で1955年の第三巻[24]で実現された。

Adoの定理の証明にはリー環論特にLeviの定理（$\mathfrak{g}$は根基と半単純部分環の半直積となる）が必要であるが、シュヴァレーはこれと定理2を「リー群論III」で証明したのである。

そこでリー群論としては定理1の証明が要となる。シュヴァレーは、これを「多様体Gの包含的な接空間バンドルは、積分可能である」というフロベニウスの定理を大域化することによって証明した。定理1の場合 $\mathfrak{f}$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー環になるということが、$\mathfrak{f}$ の定義する接空間バンドルが包含的であることを意味する。そしてシュヴァレーはGの各点 g を通る $\mathfrak{f}$ の極大積分多様体が唯一つ存在することを証明した。特に単位元 e を通るものをHとすれば、これが求めるGの連結リー部分群で、$L(H)=\mathfrak{f}$ となるものである。このとき g を通る $\mathfrak{f}$ の極大積分多様体は剰余類 gH となる。以上のようにして、シュヴァレーは、リーの局所的理論を大域化することに成功したのである。

ただし大域化に伴って新しい問題も発生する。リーは二つのリー群（芽）は，その構造定数が等しいとき，同じ構造を持つと考えた（cf. 杉浦（53））。これはリー環の同型な二つのリー群は同じ構造を持つということであり、それは大域的には正しくない。すなわち二つの連結リー群 G, G′ のリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ が同型ということは，G と G′ が局所同型（単位元の近傍で一致する）ということで，それは必ずしも大域的な同型を意味しない。既に1926年にシュライヤー（51）（52）は、被覆群の理論を構成し，互に局所同型な連結リー群の間の大域的関係を記述する一般論を作っていた。即ちそのような連

結リー群の内同型を除き唯一つ単連結なもの G^*があり、それと局所同型な任意の連結リー群GはG^*の離散正規部分群Dによる剰余群G^*/Dと同型になるというのである。シュヴァレーは[9]でこのシュライヤーの理論をとり入れた。しかしその記述は、独自の構成を取って居り、シュライヤーのような、道の連続変形を用いず基本群も一次元ホモトピー群$\pi_1(G)$でなく、Gの普遍被覆群G^*のG上の被覆変換群として定義する。正直の所シュライヤーの記述の方がはるかに読み易い。

しかしシュヴァレー[9]では、リーやシュライヤーにはない一つの視点が打出されている。それはリー群とリー環の対応が、リー群の間の型写(即ち解析的準同型写像)に対してどう振舞うかを考えたことである。リー群Gからリー群Hへの解析的準同型写像Φが与えられたとき、リー環$L(G)$から$L(H)$へのリー環の準同型写像$d\Phi$が

$$(1) \qquad (d\Phi(X))_e = (d\Phi)_e X_e$$

によって与えられる。これは明らかであるが、逆が問題である。これについてシュヴァレーは次の定理3を証明した。

定理 3. G, Hを連結リー群とする。

1) $\Phi : G \longrightarrow H$が解析的準同型写像ならば、(1)によりリー環の準同型写像 $d\Phi : L(G) \rightarrow L(H)$ が定義される。

2) 逆に$\varphi : L(G) \rightarrow L(H)$なるリー環の同型写像が与へられ

たときGの単位元eの近傍Uで定義されたHへの解析的局所準同型写像 $\varphi: U \to H$ で任意の$X \in L(G)$に対し，Xと$\varphi(X)$はφ-related となるものが存在する。

3) 2)で特にGが単連結のとき，GからHへの解析的準同型写像 Φ で $d\Phi = \varphi$ となるものが唯一つ存在する (Ch. IV. Theorem 2 (p. 113))

2)は容易に証明できるが3)が面倒である。Gは連結だから単位元eの近傍Uから生成される。$U = U^{-1}$ と仮定してよいが，このときGの任意の元xは

(2) $$x = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad x_i \in U \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

の形に表わされるから，準同型写像Φでφの延長となっているものは，(2)のxに対し

(3) $$\Phi(x) = \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)$$

となる。問題は(2)のような表示は一般に一意的でないから，(3)によって一価函数として$\Phi(x)$が定義できるという保証がないことである。シュヴァレーは，複素解析函数の解析接続における一価性定理にヒントを得て，一般的な一価性定理(Principle of monodromy)を証明してGの単連結性からΦの一価性を導いた。(Ch. II Theorem 2, p. 46)．

この定理1, 2, 3がシュヴァレーの大域的リー群論における基本定理である。定理1, 2がリーの理論の直接の大域化である

に止まらず、用いられる概念自体も変化していることに注目したい。シュヴァレーは、多様体論の組み立てから始めて、リー群論を精密かつ自然な表現で記述するのに成功したのであった。

以上が[9]の大域リー群論への最も重要な寄与であるが、[9]にもこの外にいくつか新しい定理が述べられている。無理数αを方向係数とする直線 $y=\alpha x$ の2次元トーラス群 $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ における像Hは、$\mathbb{T}^2$の閉じていないリー部分群である。この場合Hはリー群としては$\mathbb{R}$に同型であるが、その位相は$\mathbb{T}^2$の相対位相とは異なる。この例は以前から知られていたが、これに対しシュヴァレーは次のことを証明した。

定理4　Hが連結リー群Gの連結リー部分群でGの閉集合となっているものとする。このときHの部分多様体としての位相は、Gの相対位相と一致する。(Ch. IV §V Proposition 1, p.110)

この外[9]には、指数写像 $\exp: L(G)\to G$ の定義および$L(G)$上の一次写像としての微分$(d\exp)_X$の計算(Ch. V. §V Proposition 1, p.157)やリー群Gの自己同型群$\mathrm{Aut}\,G$がまたリー群となることの証明(Ch. IV. §XV Proposition 1, p.137)など、いくつか新しい結果があるが技術的になるのでこゝでは触れない。第V章では微分形式の理論が大域的な立場から系統的に展開され、特にリー群上の左不変微分式の外微分の公式

が与えられ規準座標系による左不変微分式の具体的な構成法が与えられている。さらに左不変微分式による左不変ハール積分の構成がされている。

Ch. VIでのコンパクト・リー群に対する淡中双対定理の取扱いは重要であるが、コンパクト・リー群が実線型代数群の構造を持つというのがその中心的内容なので、IIで扱うことにする。

シュヴァレー[9]は、解析的多様体論と大域的リー群論の基礎を確立した。このことは、リー群論および微分幾何学の研究史において、基本的な意義を持つ事実である。

§2 レプリカの理論

この節の内容はやや技術的である。手短かに内容を述べる。シュヴァレーのこの方面への貢献は、標数0の体Kに対し、リー環$\mathfrak{gl}(n, K)$の部分リー環$\mathfrak{g}$がある線型代数群$G(\subset GL(n, K))$のリー環となるための必要十分条件をあたえ、それをK上のリー環の構造論に応用した点にある。シュヴァレーはこの必要十分条件が代数群を表に出さないで、純粋に線型代数学の言葉(テンソル不変式、レプリカ)で表現できることを発見し[6]それを用いて、リー環の構造論の簡易化に成功した。特にこれによりカルタンによる「半単純$\Longleftrightarrow$キリング形式が非退化」

という判定条件の見透しのよい証明を得たのであった。

Kを任意の体、$X\in gl(m,K)$, $Y\in gl(n,K)$ に対しそのテンソル和$X\oplus Y$を $X\oplus Y=X\otimes 1_n+1_m\otimes Y$ によって定義する。こゝで$\otimes$は行列のテンソル積であり、1_nはn次単位行列である。リー群のテンソル積表現を微分するとリー環に対してはこのテンソル和が対応するのである。また$X^*=-{}^tX$とおく。任意の$r,s\in\mathbb{N}$に対して

$$X_{r,s}=\underbrace{X^*\oplus\cdots\oplus X^*}_{r\text{個}}\oplus\underbrace{X\oplus\cdots\oplus X}_{s\text{個}}$$

とおく。$V=K^n$, $V^*=V$の双対空間、とする。

$$V_{r,s}=\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{r\text{個}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{s\text{個}}$$

とし、$v\in V_{r,s}$ が

(1) $\qquad X_{r,s}v=0$

をみたすとき、vはXの(r,s)型（テンソル）不変式であるという。

定義1 $X,Y\in gl(m,K)$とする。

$$(\forall(r,s)\in\mathbb{N}^2)(\forall v\in V_{r,s})(X_{r,s}v=0\Rightarrow Y_{r,s}v=0)$$

が成立つときYはXのレプリカ（replica）であるという。（シュヴァレーはこの記号を用いていないが、日本の研究者の慣用に従って）このことを$X\twoheadrightarrow Y$と記すことにする。

シュヴァレーは，Kが完全体のとき任意の行列XはX=$X^{(s)}+X^{(n)}$，$X^{(s)}$と$X^{(n)}$は可換 $X^{(s)}$=半単純，$X^{(n)}$=冪零と一意的に分解できることを示した。これをXのジョルダン分解と呼ぶことにしよう。(これはXがジョルダン標準形のときは，対角線の部分と残りの部分への分解である。)シュヴァレーは[6]はレプリカについて，次のような結果を得た。

定理 1　1) $X \twoheadrightarrow Y$のとき，Yは$f(0)=0$となる多項式$f(t)$により，$Y=f(X)$と表わされる。

2) $X, Y \in \mathfrak{gl}(m, K)$に対し，「$X \twoheadrightarrow Y \Leftrightarrow X^{(s)} \twoheadrightarrow Y^{(s)}, X^{(n)} \twoheadrightarrow Y^{(n)}$」

3) 半単純なXの固有値を$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$とするとき，多項式$f(t) \in K[t]$に対し，

$$「X \twoheadrightarrow f(X) \Longleftrightarrow (\forall k_i \in \mathbb{Z}\ (1 \leq i \leq m))\left(\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} k_i f(\alpha_i) = 0\right)」$$

4) X=冪零のとき「$X \twoheadrightarrow Y \Leftrightarrow Y=aX,\ a \in K$」

5) X=冪零 $\Longleftrightarrow$ $X \twoheadrightarrow Y$となる任意のYに対し$Tr(XY)=0$.

ただし 2)—3)では，基礎体Kは完全，4) 5)では標数0と仮定する。

線型代数群とレプリカの関係は，次の定理2で与えられる。

定理 2　Kを標数0の体とするとき，$\mathfrak{gl}(n, K)$の部分リー環$\mathfrak{g}$に対し，次の1)と2)は同値である。

1)　$X \in \mathfrak{g}$，$X \twoheadrightarrow Y$ (YがXのレプリカ) $\Rightarrow Y \in \mathfrak{g}$

2)　$\mathfrak{g}$はある線型代数群$G(\subset GL(n,K))$のリー環である。

始めシュヴァレーは，$K=\mathbb{C}$のとき，Tuanとの共著論文[8](1945)においてこの定理を証明した。後の著書[18](1951)では，$X\in\mathfrak{gl}(n,K)$を含む$GL(n,K)$の最小の代数部分群$G(X)$のリー環の元Yがレプリカを特徴付ける基本性質(定理1,2)3)4))をみたすことによって定理を実质上証明した。([18]ではテンソル不変式によるレプリカの定義には全く触れていない。)そこで，シュヴァレーは上の定理2の性質をみたすリー環$\mathfrak{g}(\subset\mathfrak{gl}(n,K))$を代数的リー環と呼んでいる。シュヴァレーは，レプリカの概念を用いてリー環論の基本的な諸定理，特にカルタンによる半単純性の判定条件が見通しよく導かれることを発見し，それを[10]で示した。[10]では次の簡単な補助定理1が出発点となっている。

補助定理 1.　P, Qが共に$V_{r,s}$の部分線型空間で$Q\subset P$となるものとするとき

$$\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{gl}(n,K)\mid X_{r,s}P\subset Q\}$$

とおく。このとき$\mathfrak{g}$は代数的である。即ち$X\in\mathfrak{g}$, $X\twoheadrightarrow Y$ならば$Y\in\mathfrak{g}$となる。

この補助定理1とレプリカの性質(定理1,5)を組み合せて，シュヴァレーは次の補助定理2を得た。K=標数0とする。

補助定理 2.　$\mathfrak{g}$を$\mathfrak{gl}(n,K)$の部分リー環とする。

1) $\mathfrak{n} = \{N \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Tr}(NX) = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})\}$

とおく。もし$\mathfrak{g}$が代数的リー環ならば、$\mathfrak{n}$のすべての元は冪零である。

2) 任意の$X, Y \in \mathfrak{g}$に対し$\mathrm{Tr}(XY)=0$ならば$\mathfrak{g}$は可解である。([10] Proposition 3 and 4).

これからカルタンの判定基準が直ちに導かれる。

定理 (カルタンの判定基準) 標数0の体上のリー環$\mathfrak{g}$に対し、次の(1)(2)は同値である。

(1) $\mathfrak{g}$は半単純, (2) $\mathfrak{g}$のキリング形式は非退化。

証明 (1)⇒(2) $\mathfrak{n} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid B(X,Y)=0 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})\}$とおくと補助定理2, 2)により$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{n}$は可解である。$\mathfrak{g}$=半単純なら、$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$は忠実な表現だから、$\mathfrak{n}$は$\mathfrak{g}$の可解イデアルとなる。従って$\mathfrak{g}$=半単純なら$\mathfrak{n}=0$で$B$は非退化」

(2)⇒(1) $\mathfrak{a}$を$\mathfrak{g}$の任意の可換イデアルとすれば、$\forall A \in \mathfrak{a}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$に対し$(\mathrm{ad}(A)(\mathrm{ad}X))^2\mathfrak{g} \subset (\mathrm{ad}A)(\mathrm{ad}X)\mathfrak{a} = 0$

$((\mathrm{ad}A)(\mathrm{ad}X))^2 = 0$. $B(A,X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}A)(\mathrm{ad}X) = 0$ だから

B=非退化なら $A=0$, $\mathfrak{a}=0$。

シュヴァレーは、その教科書[24]でこのやり方でリー環論を展開した。その後ブルバキ(6)の「リー群とリー環」第I章では、上の特別な場合の補助定理Iと補助定理2, 1)を合わせた次の補助定理3 (ブルバキ(6)第I章§5 補題3)

があれば、補助定理2, 2)が導かれ従ってカルタンの判定条件も得られることを示した。

補助定理 3. Vを標数0の体K上の有限次元線型空間P, QをVの部分線型空間で$Q \subset P$となるものとし,

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X, P] \subset Q\}$$ とおく。

$X \in \mathfrak{g}$ がすべての$Y \in \mathfrak{g}$ に対し $\mathrm{Tr}(XY) = 0$ をみたせば、Xは冪零である。

この補助定理3は、シュヴァレーのレプリカの理論の中心的な部分をレプリカを表面に出さずに再現したものである。これによってリー環論の展開にレプリカは必ずしも必要ではなくなった。しかし標数0の体上の線型代数群のリー環を線型代数的に特徴付ける概念としてのレプリカの意義は失われていない。ただ現在の線型代数群の理論は、標数pの場合をも含めるため、リー環を用いないやり方が主流となって居りこのシュヴァレーのレプリカの理論も忘れられている。しかしシュヴァレーの群論の研究史においては、彼が群論で得た最初の理論であり、かつ彼を代数群に導くきっかけともなった点でこのレプリカ理論は、重要な意義を持つ。

§3 二つの存在定理と共役定理

シュヴァレーは[12]において、半単純リー環に対する基本

的な二つの存在定理の統一的かつ代数的な証明を始めて与えた。その定理は次のような内容のものである。

定理　1　　任意の既約ルート系R（またはカルタン整数の組S）に対し，標数0の代数的閉体K上の単純リー環Lで，Rをルート系とするものが存在する。

定理　2.　　単純リー環Lのカルタン部分リー環V上の任意の優整形式w_0に対して，w_0を最高ウエイトとする，Lの有限次元既約表現が存在する。

これらの定理の歴史は、次の通りである。複素数体$\mathbb{C}$上の単純リー環の分類を始めて行ったキリング(40)は、その分類をカルタン整数の組の分類によって行った。このとき逆に各カルタン整数の組Sに対し実際にリー環が存在するかが問題になる。既にリー環が知られていた典型リー環については、これは問題ないが、例外リー環の存在が問題になるわけである。キリングはSを用いて各例外リー環の基底の間の交換子積を定義したが、それらがヤコビの恒等式をみたすことを確めることはしなかった。

その後カルタン(10)は、キリングの分類論の誤りを正し，正しい証明を与えた。カルタン行列Sに対するリー環の存在についてもカルタン(10)は各単純リー環の最低次元表現に対応する線型リー環を与えているので、存在も示されているわ

けである。ただしE_8に対しては、その最低次元表現はE_8の随伴表現なので、リー環E_8の存在が前提となる。従ってE_8に対してはなお問題が残っている。(§4参照) 例外リー環特にE_8の構成が困難なことが、一方ではルート系に対するリー環の存在を、一般的に証明しようという考えを後に生じさせる一つの動機となった。

ワイル(65)では、複素半単純リー環 のカルタンによる構造論を精密化して、いわゆるワイル基底を導入した。
$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}_\alpha$をルート空間分解とするとき$\mathfrak{g}_\alpha$の基底$E_\alpha$を適当にとるとき、

$$[H,E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha,\ [E_\alpha,E_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta\in R \\ 0, & \alpha+\beta\notin R\end{cases}$$

において、構造定数$N_{\alpha,\beta}$の2乗はルート系から定まる正数となる。より詳しく言えば

$$\beta+j\alpha\in R\quad(-q\leqq j\leqq p),\ \beta-(q+1)\alpha,\ \beta+(p+1)\alpha\notin R\ (p\geqq 1)$$

のとき

$$N_{\alpha,\beta}{}^2=\frac{p}{2}(q+1)(\alpha,\alpha)$$

となる。従って$N_{\alpha,\beta}$は実数でその符号を除いてルート系Rから一意的に定まるのである。そして符号もルートの字引式順序に関し、下から帰納的にきめて行くことができる。このことからファン・デル・ワルデン(58)は、ルート系Rによって

複素半単純リー環が、同型を除き一意的に定まることを注意した。

さて，ワイルは一方でルート系をユークリード空間のベクトルの集合として定義し，ワイル群を各ルートαを法ベクトルとする超平面π_αに関する鏡映から生成される鏡映群として定義した。ファン・デル・ワルデン(59)は、このベクトルの集合としてのルート系の分類を初等幾何的方法で実行した。ワイルは$\mathfrak{g}$のコンパクト実形$\mathfrak{g}_u$をリー環とする連結リー群G_uが常にコンパクトであることを示した。$\mathfrak{g}_u$のカルタン部分環$\mathfrak{h}_u=\mathfrak{g}_u\cap\mathfrak{h}$は，$G_u$の極大トーラスTに対応する。このときトーラスの周期性から，超平面π_αを各整数kだけ平行移動した超平面$\pi_{\alpha,k}$が生ずる。超平面族$\{\pi_{\alpha,k} \mid \alpha\in R, k\in\mathbb{Z}\}$に対応する鏡映族$\langle s_{\alpha,k} \mid \alpha\in R, k\in\mathbb{Z}\rangle$から生成される群$W_a(R)$が、ルート系$R$のアフィン・ワイル群である。

コクセター(66)(附録)でルート系とアフィン・ワイル群が一対一に対応することを発見した。例えばB_n型とC_n型のルート系は互いに双対ルート系なので，ワイル群は同型であるが、$n\geqq 3$ならばB_nとC_nは同型でない。そしてアフィン・ワイル群も$n\geqq 3$のとき$W_a(B_n)\neq W_a(C_n)$となる。(コクセター(22)は$\mathbb{R}^n$の離散鏡映群の分類をコクセター図形を用いて、きれいな形で与えた。)ヴィット(71)はコクセタ

ー(66)の結果の別証を与えこれを複素単純リー環の分類に用いた。ヴィットの結果の内で，単純リー環の存在に関する一般論は次の形であった。

定理（ヴィット(71) Satz 15） 4次元以下の各ルート系に対し，それをルート系とする複素単純リー環が存在すれば，任意の既約ルート系 R に対し，R をルート系とする複素単純リー環が存在する。

A, B, C, D型ルート型には，典型リー環が対応する。この外ヴィットは(71)で例外型複素単純リー環 G_2, F_4 を構成している。従って上の定理からE型のルート系に対しても，対応するリー環の存在が保証されたことになる。

こうしてファン・デル・ワルデンとヴィットの結果によって，複素単純リー環の代数的な分類が一応でき上ったといえる。ただしそれは上述のヴィットの定理が示すように統一性の面で，問題が残った。4次元以下という制限なしに存在の証明ができることが望ましいのである。

また定理2の証明は，カルタン(11)(1913年)が各複素単純リー環の各基本ウェイト Λ_i を最高ウェイトとする既約表現を具体的に与えるという個別チェックにより証明した。後ワイル(65)(1934/35)は，コンパクト半単純リー群の指標公式とペーター・ワイルの定理（既約表現の行列成分の完全性定理）を用いて，

定理2の統一的な証明を与えた。(杉浦(54)参照)　これは群の調和解析の見地からは最も自然な証明といえる。しかしそれは解析的な証明であるから、代数的な証明は別の意義がある。

以上がシュヴァレーがこの方面の研究に着手するまでの定理1, 2の研究史の概略である。これに対してシュヴァレーの研究のねらいは次の三点にあった。

1. 定理1, 2を各(半)単純リー環に対して統一的に証明する。
2. その証明を解析や幾何を用いることなく純粋代数的に行う。
3. 定理1と定理2を同時に証明する。

シュヴァレーは[12]で定理1, 2の証明の方針を発表した直後に、プリンストンの研究所にいたハリッシ・チャンドラが独立に定理2の証明を得ていたことを知った。[13]はそのことの報告である。結局シュヴァレーは学位をとった(1947年)ばかりの若いハリッシ・チャンドラ(29)に証明の発表を委ねたのである。ハリッシ・チャンドラの序文によると彼が考えていたのは定理2だけで定理1も同時にできるというのはシュヴァレーのアイディアであり、発表された(29)では、このアイディアを取入れて、定理1を含むようにしたとのことである。

さらにその後セール(49)は、定理1の証明を整理し、生成

元とその間の基本関係として見通しのよい形に定理1を再定式化した。リー環が構成できれば，その展開環の適当な極大左イデアルによる剰余加群上の正則表現を考えることにより定理2は比較的容易に得られる。これが現在の標準的な方法である。(例えばハンフリーズ(33)を見よ) 以上の経緯によりシュヴァレーの原論文を読んだ人はあまりいないと思われるので，その後半の翻訳を以下に掲げておく。

「カルタン行列 $S=(a_{ij})$ が与えられたとする。これは有理数体Q上のl次元ベクトル空間V上の一次形式の有限集合としてのルート系Rの基本ルート系$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$から，$a_{ij}=\alpha_i(H_{\alpha_j})$によって与えられる。ここで$H_\alpha$はルート$\alpha$に，基本2次形式(キリング形式)によって対応する$V$の元である。先ず無限次元ベクトル空間$M$を構成する。

$$\Sigma=\{\sigma=(i_1,\cdots,i_m)\mid m\in\mathbb{N},\ 1\leq i_1,\cdots,i_m\leq l\}$$

とし，各$\sigma\in\Sigma$と一対一に対応する元$x(\sigma)$ ($\sigma\in\Sigma$)を基底とする体K上のベクトル空間をMとする。($m=0$のとき$\sigma=\phi$, $x(\phi)=x_0$とする) 今任意の優整形式w_0 (V上の一次形式で$w_0(H_{\alpha_i})\in\mathbb{N}$ ($1\leq i\leq l$)となるもの)が与えられたとする。各$\sigma=(i_1,\cdots,i_m)$に対して，ウエイトw_σを次のように定義する：

$$w_\sigma = w_0-\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{i_\mu}$$

Mの元uがウエイトwのウエイト・ベクトルであるとは，uが$w=w(\sigma)$となるような$x(\sigma)$の一次結合となることをいう。このときM上の3ℓ個の一次変換P_i, Q_i, D_i $(1\leqq i\leqq \ell)$で交換関係

$$[P_j, D_i]=a_{ji}P_j,\quad [Q_j, D_i]=-a_{ji}Q_j, [Q_i, P_i]=D_i$$
$$[Q_j, P_i]=0 \quad (i\neq j)$$

をみたすものが構成できる。D_i, Q_i, P_iは

$$D_i x(\sigma)=w_\sigma(H_{\alpha_i})x(\sigma),\quad Q_i x(\sigma)=x(i,\sigma),\quad P_i x_0=0$$

をみたす。

Mのウエイト・ベクトルuは，$\{P_i, Q_i, D_i \mid 1\leqq i\leqq \ell\}$から生成される多元環$\mathfrak{U}$の元$U$であって，$Uu=x_0u$, $x_0\neq 0$となるものが存在するとき，第一種であるといい，そうでないとき第二種という。Mの第二種ウエイト・ベクトル全体の張る部分ベクトル空間をNとおく。NはP_i, Q_i, D_i従って$\mathfrak{U}$で不変である。そこで商空間M/N上に$\mathfrak{U}$の表現ρが生ずる。ρによるP_i, Q_i, D_iの像をP_i', Q_i', D_i'とする。ここで本質的なことは，M/Nが有限次元となることの証明である。

そのためにワイル群Wの任意の元sをとり，$s\alpha_i=\beta_i$ $(1\leqq i\leqq \ell)$とおく。このとき$(\beta_1,\cdots,\beta_\ell)$はまた一つの基本系である。$(\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell)$に対応する$P_i, Q_i, D_i$と平行した性質を持つ$3\ell$個の一次変換$sP_i', sQ_i', sD_i'$が$(\beta_1,\cdots,\beta_\ell)$に対応して，

P_i', Q_i', D_i' の生成する多元環の中に存在する。さらにM/N の元 $y \neq 0$ で，$sP_i'y=0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ となるものが存在する。このとき M/N 上に weight w のウエイト・ベクトルが存在すれば，ウエイト sw のウエイト・ベクトルも存在する。従って特に

$$(1) \qquad sw = w_0 - \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{i_\mu}$$

の形でなくてはならない。$s \in W$ を適当に選ぶことにより，$sw=w_1$ は優形式となる。このような w_1 は有限個しか存在しない。…… (＊) [Mの定義から M/N における，一つのウエイトの重複度は有限であるから]，(＊) からM/N が有限次元であることが導かれる。このとき一次変換 P_i', Q_i', D_i' $(1 \leqq i \leqq l)$ の生成するリー環Lは，単純リー環で，そのカルタン行列がSとなる。またこのLの M/N 上の最高ウエイトは w_0 であり，w_0 を最高ウエイトとする有限次元既約表現の存在も証明される。」(＊) の証明を補っておこう。w_1 は優形式だから$(w_1, \alpha_i) \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq l)$ である。そして$w_1 = w_0 - \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{i_\mu} = w_0 - \beta$ の形である。このとき $(w_1, \beta) = \sum_{\mu=1}^{m} (w_1, \alpha_{i_\mu}) \geqq 0$，$w_0 = w_1 + \beta$ だから

$$|w_0|^2 = |w_1|^2 + |\beta|^2 + 2(w_1, \beta) \geqq |w_1|^2$$

となるので，w_0 が与えられたとき，(1) の形の優整形式w_1 の集合は，整係式の作るディスクリート集合の有界集合となり，有

限集合である。

定理1, 2は有限次元リー環論の基本的定理であるだけでなく、後のKac-Moodyリー環の発見にもつながる。論文[12]は短いけれども重要なアイディアを含む論文であった。

ルート系に対する半単純リー環の存在定理と並んで、代数的閉体上の半単純リー環に対しルート系が同型を除き一意的に定まるという一意性定理も基本的である。その基礎となるのは、次の定理である。

定理 3　複素半単純リー環$\mathfrak{g}$の任意の二つのカルタン部分環$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$に対し、$\mathfrak{g}$の内部自己同型$\sigma$（Aut $\mathfrak{g}$の単位元連結成分の元）が存在して$\sigma\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$となる。

定理3はカルタン(12)が初出(証明なし)。この定理は次の定理4とユニタリ変形の共役性（極大コンパクト部分群の共役性の特別な場合 E. カルタン(15)）から導かれる。

定理 4　コンパクト連結（半単純）リー群Gの任意の二つの極大トーラスH, H'は共役である。

この定理4はワイルの基本定理 $G=\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ から導かれる。従って定理4による定理3の証明は、位相的考察に基づく。シュヴァレー[5]は半単純という仮定なしに次の定理5を証明した。

定理 5　任意の複素リー環$\mathfrak{g}$の二つのカルタン部分代数$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$は$\mathfrak{g}$の内部自己同型$\sigma$で共役である；$\sigma\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$.

シュヴァレーの証明は，プリュッカー座標と代数幾何（生成点の概念）を用いる純代数的なもので，任意の標数0の代数的閉体で成立つ。それはそれまでの位相的・解析的な証明と全く異なるものであった。（定理5の簡易化された証明についてはウインター（70），ハンフリーズ（33）参照.）。

§4 例外リー群（環）・スピノル

前節に述べた任意のルート系に対する（半）単純リー環の存在定理は，一意性定理と合わせると半単純リー環がルート系と一対一に対応することを示す。これは標数0の代数的閉体上の半単純リー環論がルート系という初等幾何学的対象によって統制されることを示す。実単純リー環の分類は，リー環またはルート系に対するガロア群 $G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の作用を考慮することにより $\mathbb{C}$ 上の分類から得られる（E. カルタン(12)，荒木捷郎（4））。この統一性は，例えば有限単純群の分類と比較したとき，際立った特徴といえる。しかしまた単純多元環の分類程一様でもなく，代数的閉体上でも4系列の典型リー環と5個の例外リー環がそれぞれの個性を持つ。

シュヴァレーの群論の仕事では前節の存在定理のような統一理論が重要であるけれども，彼はこのような統一理論の外に，各単純リー群（リー環）特に例外リー群の個性に関する個別

的な研究も行っている。この方面で重要な研究を行ったフロイデンタール(27)も、「シュヴァレー・シェイファー[14]の研究が出発点だった」と述べているように[14]はこの方面の研究史上重要である。

例外リー群の研究はE.カルタンに始まる。カルタンは全集I, p.132で例外群の変換群としての構成を述べ、(10)ではその最低次元表現を構成している。しかしそれは説明が簡単すぎて、理解が困難な部分を含む。これを解読し、新しい研究の出発点とする仕事は、かなり遅れて始った。ジェイコブスンのG_2型リー環に対する研究(39)(1939年)あたりがそのはしりであろうか。カルタン(12)(全集I p.2981)は、ケイリーの8元数の作る非結合環(以下ケイリー環と呼ぶ)の自己同型写像群がG_2型例外リー群となるという注意を述べている。これに対しジェイコブスン(39)は、その無限小版として、標数$\neq 2$の任意の体K上のケイリー環$\mathfrak{C}$の導作用素(derivation)全体の作るリー環$\mathfrak{D}$は、14次元の単純リー環であることを証明している。キリング・カルタンの複素数体(標数0の代数的閉体でも同じ)上の単純リー環のリストでは、14次元のものはG_2型リー環しかない。そこでカルタンの注意が成立つことも証明されたのである。

シュヴァレー・シェイファー[14]では、1932年物理学者P.ヨルダン

が導入したジョルダン環を利用している。ジョルダン環とは双線型な積を持つベクトル空間で、積が $ab=ba$, $(ab)a^2=a(ba^2)$ という二つの恒等式をみたすものをいうのである。ジョルダン環は数学的にも興味を持たれ、ヨルダン等、アルバート(3)、ジェイコブスン等によってその構造が調べられ、単純環の分類が行われていた。$\mathbb{R}$上の単純ジョルダン環の典型的なもののーつに$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ 上のエルミート行列の全体が

(1) $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY+YX)$ (右辺の積は行列の通常の積)

を積として作るジョルダン環がある。これらは多元環から(1)で乗法を定義して得られる所謂特殊ジョルダン環(Special Jordanalgebra)であるが、特殊ジョルダン環でない唯一つの単純ジョルダン環として、ケイリー環$\mathfrak{C}$を係数とする3次のエルミート行列の全体$\mathfrak{J}$がある。これが例外ジョルダン環と呼ばれるものである。シュヴァレー・シェイファー[14]は、これについて次の定理1,2を得た。

定理 1 標数0の代数的閉体上のケイリー環$\mathfrak{C}$上の3次エルミート行列の全体に(1)より乗法を定義して得られるジョルダン環$\mathfrak{J}$とする。$\mathfrak{J}$上の導作用素 ($D(X\circ Y)=DX\circ Y+X\circ DY$ をみたす$\mathfrak{J}$上の一次変換 D) の全体$\mathfrak{D}$が作るリー環は、54次元の単純リー環で F_4 型である。

定理 2 $X\in\mathfrak{J}$による右移動を $R_X: Y\to X\circ Y$ とし、

$\mathfrak{R}=\{R_X \mid X\in\mathfrak{J},\quad \mathrm{Tr}X=0\}$ とおくとき，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{J})$ の部分リー代数

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{D}+\mathfrak{R}$$

は78次元の単純リー環で E_6 型である。

証明はどちらも適当に大きな部分リー環を用いて，次元を計算し随伴表現をその部分環の既約表現に分解することにより，単純性を導く。$\mathfrak{D}$ の場合は52次元の単純リー環は F_4 しかないことから，直ちに $\mathfrak{D}=F_4$ と結論される。$\mathfrak{g}$ の場合78次元の単純リー環は B_6，C_6，E_6 の三個があるが，$\mathfrak{g}$ のように27次元の既約表現（$\mathfrak{J}$ を表現空間とするもの）を持つのは E_6 だけであることから：$\mathfrak{g}=E_6$ と結論している。

[14]では，上の定理の証明に8次元直交群のリー環 $\mathfrak{o}(8,K)$ に対する「三つ組原理」(principle of triality) というものを使っている。これは $\mathfrak{o}(8,K)$ の位数3の外部自己同型をケイリー環を用いて構成したものである。これは8次元に限る特殊な現象であるが興味深い。シュヴァレーは[22]の最終章でこれを別の形で取り上げて詳しく論じている。「三つ組原理」はE.カルタン(13)が発見したもので，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の外部自己同型 $X\mapsto -{}^tX$ が射影幾何の双対原理に関連するのに対比して命名された。

このように[14]では，$\mathfrak{D}$ および $\mathfrak{g}$ が F_4 型，E_6 型である

ことを、最短コースで証明するという内容になっている。これにさきし[19][20]では別の立場からE_6を取上げている。E_6は27次元既約表現を持ち、その表現の像はこの27次元空間W上の一次変換で、ある3次形式を(無限小変換の意味で)不変にするものの全体となることをE. カルタン(10)(p.142)が注意している。[19]は、このカルタンの言明を実際に確かめたもので、外積代数を用いて、この3次形式Fを具体的に構成している。そして$\mathfrak{g}=\{X\in \mathfrak{gl}(W)\mid XF=0\}$とおくとき、この線型リー環$\mathfrak{g}$のウエイトとルートを計算している。ルートの形から、$\mathfrak{g}$がE_6型であることが直接確められる。

例外リー群(環)の構造に関するシュヴァレーの発表された仕事は以上の[14][19][20][22]だけであるが、そのベー亻数に関する研究[15][26]が示すように彼は例外リー群全体に関し強い関心を持っていた。1953年シュヴァレーはフルブライト交換教授として来日したが、その時の最初の講演のテーマとして例外リー群を選んでいる。服部昭(30)によるその講演記録を見ると、F_4に関する[14]の結果の外、E型の群についても述べている。特にE_7はある56次元ベクトル空間の一つの4次形式を不変にする一次変換群として得られると述べている。これはカルタンの学位論文(10)(p.148)にある記述を受けたものであるが、これについてシュヴァレー自身がど

れだけ研究していたかは明らかでない。

このシュヴァレーの講演記録は次のような言葉で結っている。「例外リー群がすべて直交群に関係するのは principle of triality による。しかし，なぜ E_6, E_7, E_8 が射影群に関係してくるのか，またなぜ E_8 だけが低い次元の表現をもたないのか，これらのことは私には全く神秘的に思える。」

ここで E_8 の表現について述べていることは，次の意味である。各単純リー群の次元と $\mathbb{C}$ 上の自明でない既約表現の最低次元数は次の表にまとめられる。

単純リー群	$A_n (n \geqq 1)$	$B_n (n \geqq 2)$	$C_n (n \geqq 3)$	$D_n (n \geqq 4)$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
次元	n^2+2n	$2n^2+n$	$2n^2+n$	$2n^2-n$	78	133	248	52	14
既約表現の最低次元	$n+1$	$2n+1$	$2n$	$2n$	27	56	248	26	7

すなわち E_8 以外の各単純リー環は皆自身の次元より小さい次元数の既約表現を持つ。最低次元表現の像が同型なリー環の内最も簡単なものと考えられる。所が E_8 だけはそうではない。E_8 の最低次元表現は E_8 の随伴表現である。従ってこの場合 E_8 の最低次元表現を構成することは，E_8 自身を構成するのと同じであり，最低次元表現を作ることで最も簡明な E_8 の構成を得ることはできないのである。

シュヴァレーの上述の疑問は，今日でも十分に解明されたとは言えない。シュヴァレー自身も，例外リー群の研究ではなく，

任意の複素単純リー環と任意の体Kから出発して，K上の分解型単純代数群（シュヴァレー群）を構成するという研究[25]を日本滞在中に完成した。例外リー群については，例外リー環全部を含むある種のリー環を，ジョルダン環を用いて統一的に構成する方法をティッツ(57)が与えたことが注目される。

シュヴァレーは例外群だけでなく，典型群についても，詳しい研究を一つ行った。それが「スピノルの代数的理論」「22」である。1913年E・カルタン(11)は各複素単純リー環の基本既約表現を具体的に構成したが，その際直交群$O(n)$のリー環は，$\mathbb{C}^n$上のテンソルでは実現できない基本表現を一つ($n=2r+1$のとき)または二つ($n=2r$のとき)持つことを発見した。1920年代スペクトルの多重項やゼーマン効果を説明するために，電子のスピンが量子力学に導入された。1928年ディラック(26)は，彼の相対論的波動方程式を導入し，それによって電子のスピン角運動量と磁気能率を正しく導くことに成功した。そこでは時間tに対する2階の波動方程式を1階の方程式に「因数分解」することによりディラックは彼の方程式を導いたのであるが，その時用いられたのが，

$$\gamma_\mu^2 = 1 \qquad \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0 \qquad (\mu \neq \nu,\ 1 \leqq \mu,\ \nu \leqq 4)$$

をみたす行列γ_μの組である。これはクリッフォードが1878年(Amer. J. Math. 1)に導入した多元環の基底と本質的に同じも

のである。(クリフォードでは $\gamma_\mu^2=-1$ となっている)(スピンをめぐる物理学史については、朝永振一郎「スピンはめぐる」(58)を参照) 1935年ブラウアー・ワイル(8)は、この関係をn次元で考え、n次元回転群の2価表現を与えるスピノルを導入した。1938年にE.カルタン(20)は独自の幾何学的な方法でスピノルを導入し、その多くの性質を論じた。

シュヴァレーの[22]は、この二つの仕事を統合し一般化したものといえる。[22]の内容の基本的なものは、次の点にある。

1. ブラウアー・ワイルが回転群の二価表現という形で論じていたのに対し、シュヴァレーは、直交群回転群の被覆群となるクリッフォード群 Γ、被約クリッフォード群 Γ_0^+ を導入しその既約表現としてスピン表現、半スピン表現を導入して、事態を明確に定式化したこと、これらの表現の表現空間の元がスピノル、半スピノルである。

2. ブラウアー・ワイルは複素数体 $\mathbb{C}$ 上の単位二次形式 $\sum x_i^2$ に基づいて理論を構成したのに対し、シュヴァレーは、任意の体K上の任意の二次形式Qに対し、クリッフォード環 $C=C(Q)$ を構成してその構造を明らかにした。

3. Qが偶数次元の空間上の極大指数2次形式(2r次元空間M上の指数rのQ)に対し、Mの各r次元全特異部分空間Zが、ある半スピノル u_Z とスカラー倍 $\neq 0$ を除き一対一

に対応する。u_z を Z の代表スピノルといい，ある Z に対し u_z の形になるスピノルを純スピノルという。これは E.カルタン(20)が始めて導入した概念であるが，シュヴァレーはその新しい特徴付けを与えた。

4．最終章でシュヴァレーは，8次元の極大指数2次形式Qに対し，「三つ組原理」の新しい定式化を与え，それを用いて，ケーリー環を定義した。

この「22」は，ごく一般の多元環に関する知識（単純環に対するウェダーバーンの定理等）のみを用いて，任意の体上の直交群とスピノルの理論が直接明快に構成されて居る点で，シュヴァレーの著書の中でも完成度の高いものの一つである。コロンビア大学二百年記念出版という形で出版されたためか，絶版になっているのは残念である。

§5 リー群の位相

大域的なリー群がワイル(65)により1925−26年に導入されると共に，その基本群が問題になった。ワイルはコンパクト，半単純リー群Gの基本群は有限群であることを証明したのであった。これを受けてE.カルタン(14)は各コンパクト単純リー環の随伴群の基本群をルート図形から計算することに成功した。次にカルタンは直ちにそのベッチ数の計算を

次の目標に進んだ(16)(18)(19)。彼はポアンカレの位相幾何学に関する最初の論文(45)(1895年)の示唆に従って微分形式を用いた。最初のノート(16)でカルタンは，閉多様体上のp-チェインとp-形式の間の基本的な関係を，二つの予想定理A，Bとして述べた。

ルベーグの指導の下で位相幾何を研究していたド・ラームがこれを読んで，その研究を始め，定理A，Bの証明に成功したのである(ド・ラーム(24)参照)。これがド・ラームの学位論文(23)の内容となった。この学位論文の審査をしたのがカルタンであり，(8)では既に脚註でド・ラームが証明に成功した旨が記されている。ド・ラームの定理により，ベッチ数の計算を微分形式によって行う理論的な基礎ができた。

さらにカルタンは，リー群Gの等質空間上の各(コ)ホモロジー類を不変微分形式で代表させることを考えた。これが特にうまく行くのは，彼が発見したばかりの対称空間の場合で，このとき任意の不変微分形式ωは閉形式($d\omega=0$)となる。(カルタンはこの論文では，現在の用語と異なり閉形式を，exactと呼んでいることに注意)そして特にGがコンパクト(かつ連結)の場合には，G/H上の任意の閉形式ωに対し，そのGの元gによる変換$T_g\omega$のG上の平均$I\omega$で置き換えることができる。すなわち$\omega-I\omega=d\theta$となるθがある。

また $\omega=d\theta$ なら $\omega=d\varphi$, $I\varphi=\varphi$ となる φ がある(定理I.II)

このこととド・ラームの定理から、カルタンはコンパクト対称空間 $M=G/H$ の p 次ベッチ数 B_p は、M 上の G-不変な p 次微分形式の作る線型空間の次元に等しいことを見出した。特にコンパクト・リー群 G の p 次ベッチ数 B_p は、G 上の両側不変 p 次微分形式の空間の次元に等しい。従ってそれは、G の随伴表現の p 次外積が含む単位表現の重複度に等しい。この一般論から進んでカルタンは、個々のコンパクト・リー群 G 特にコンパクト典型群の p 次ベッチ数 B_p またはそのポアンカレ多項式 $P_G(t)=\sum_{p=0}^{n} B_p t^p$ をもとめようとしたが、いくつかの一般的命題を得、また $A_{n-1}=SU(n)$, $B_n=SU(2n+1)$ のポアンカレ多項式が、それぞれ

(1) $P_{A_{n-1}}(t)=(1+t^3)(1+t^5)\cdots(1+t^{2n-1})$

(2) $P_{B_n}(t)=(1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4n-1})$

であることを予想するにとどまった。

カルタンはこの問題の重要性を論文や著書、講演などで強調した。その結果1935年になってR.ブラウアー(7)がカルタンの方法で上の予想を証明した。彼は $C_n=Sp(n)$, $D_n=SO(2n)$ に対しても

(3) $P_{C_n}(t)=P_{B_n}(t)$

(4) $P_{D_n}(t)=(1+t^3)(1+t^7)\cdots(1+t^{4n-5})(1+t^{2n-1})$

であることを示した。ほぼ同時にポントリャーギン(47)も別の方法で同じ結果を得た。

1941年にH・ホップ(Ann. of Math. 42)は，連結コンパクト・リー群の実係数全ホモロジー群$H(G)$には、群の乗法$G\times G\to G$によって自然に積が定義されて、多元環になることを発見した。そしてそれは、原始元と呼ばれる奇数次元の元$x_1,\cdots,x_l$から生成される外積代数となることを示した。このとき生成元の個数lは、Gの階数(Gに含まれるトーラス部分群の最大次元)に等しい。これから，x_iの次元数を$2m_i-1$とするとき，Gのポアンカレ多項式は

$$P_G(t)=\prod_{i=1}^{l}(1+t^{2m_i-1})$$

の形となる。この$2m_i-1=p_i$ $(1\leqq i\leqq l)$をGの冪指数と呼ぶ。

この辺からシュヴァレーのリー群論の研究が始まる。彼のリー群の位相に関する最初の論文は，連結可解リー群が$T^n\times R^m$と同相であることを示した[4]であるが、これは話の都合上後にまわし，アイレンバーグとの共著論文[10]を取上げよう。これはリー環のコホモロジー群の立場から，既知の結果を見直したものである。前半は上述のカルタンのベッチ数に関する結果を整理したものであり，例えば次の定理が証明されている。

定理 1. コンパクト連結リー群Gの実係数q次コホモ

ロジー群 $H^q(\mathfrak{g})$と同型である。

[10]の後半は、リー環$\mathfrak{g}$の表現Pに関するコホモロジー群$H(\mathfrak{g}, P)$を扱って居り、特にすべての表現が完全可約という性質が$H^1(\mathfrak{g}, P) = \{0\}$で表現されること及びリー環の拡大と2次コホモロジー群の関係が述べられている。これはJ.H.C.ホワイトヘッド(68)やアドー(1)の研究を整理したものである。なお第Ⅲ章では、ワイル(65)によって、複素半単純リー群とそのコンパクト実形の間の関係として述べられたユニタリ制限の原理が拡張され、代数化されて次の形で述べられている。

Kを標数0の体、Lをその拡大体、$\mathfrak{g}$をK上のリー環、$\mathfrak{g}^L$を$\mathfrak{g}$のLへの係数拡大とする。リー環$\mathfrak{g}$の性質Pは、次の1°、2°をみたすとき、線型性質という：

1° K上のリー環$\mathfrak{g}$が性質Pを持つとき、Kの任意の拡大体Lに対し、$\mathfrak{g}^L$も性質Pを持つ。

2° Kのある拡大体Lに対し、$\mathfrak{g}^L$が性質Pを持てば、$\mathfrak{g}$も性質Pを持つ。

定理2(ユニタリ制限の原理)Pが線型性質であるとき、任意のコンパクト・リー環(キリング形式が負値の実リー環)が性質Pを持てば、任意の標数0の体上の半単純リー環も性質Pを持つ。

この定理2は万能ではなり。例えば複素半単純リー環のカル

タン部分環の共役性は、コンパクト実形のカルタン部分環の共役性とコンパクト実形の共役性に帰着するが、これは定理2の適用外である。)

さて、実際にコンパクト単純リー群Gのベッチ数をもとめようとすると、定理1だけでは計算できない。Rブラウアー(7)は、ワイルの典型群の表現論を用いて、典型群の場合にベッチ数を計算した。コンパクト例外リー群Gでは同じようにはいかない。そこでさらにGにベッチ数を、Gに内在する不変量と結びつけることが必要となる。こゝで例外リー群の存在がリー群論の一般論の発展を促す要因となったのである。

例外リー群のベッチ数を最初にもとめたのは、Yen Chi Ta(72)であるが、これは証明の方針しか与えられていない。理論的な break through はヴェイユ(62)のファイバー空間の微分幾何学的研究からもたらされた。ヴェイユはG上の両側不変微分式が外積によって作る多元環 $H(\mathfrak{g})$ の中の原始元の作る部分空間 $P(\mathfrak{g})$ と、$\mathfrak{g}$上の多項式函数環($\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ 上の対称環) $S(\mathfrak{g})$ の中で、随伴群 $Ad\,G$ の反傾群の不変式の作る部分環 $I(\mathfrak{g})$ の間の関係を与えた。$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を $\mathfrak{g}^*$ の基底とし、G上の左不変一次微分形式と考える。$d\omega_i$ は2次微分形式で $\mathfrak{g}^*$ 上のグラスマン代数 $A(\mathfrak{g})$ の中心に属する。そこで $P(d\omega_1, \cdots, d\omega_n)$ が考えられ、$H(\mathfrak{g})$ に属する。このとき $\omega_i(X) = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ に

対し

$$(5)\qquad \eta=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial x_k}(d\omega_1,\cdots,d\omega_n)$$

を考えると $d\eta=0$, $\eta\in H(\mathfrak{g})$となる。そして写像 $\Phi:P\mapsto\eta$ は $I(\mathfrak{g})\to H(\mathfrak{g})$ の線型写像で $\mathrm{Im}\,\Phi=P(\mathfrak{g})$ となる。これから $I(\mathfrak{g})$ が次数 $m_1,\cdots,m_l$ の l 個の代数的独立な元から生成されることがわかる。そこで G のベッチ数をもとめるには、$I(\mathfrak{g})$ の生成元を調べればよい。

この代数化をもう一段進めることができる。即ち H を G の極大トーラス、$\mathfrak{h}$ を H のリー環とするとき、ワイル(65)の基本定理から

$$G=\bigcup_{g\in G}gHg^{-1},\quad \mathfrak{g}=\bigcup_{g\in G}(\mathrm{Ad}\,g)\mathfrak{h}$$

となる。そして H の正規化群 $N(H)$ を H で割った $W(G)=N(H)/H$ は有限群であり、G のワイル群と呼ばれる。それは随伴表現により $\mathfrak{h}$ 上の線型群と考えられる。この線型群は、各ルートを法ベクトルとする超平面に関する鏡映から生成される群である。今 $\mathfrak{h}$ 上の多項式函数環の内で $W(G)$ で不変なものの全体の作る環 $I(\mathfrak{h})$ を考える。このとき $P\in I(\mathfrak{g})$ に対し、その $\mathfrak{h}$ 上への限定を P' とするとき、写像 $P\mapsto P'$ により $I(\mathfrak{g})\cong I(\mathfrak{h})$ と環同型になる。$I(\mathfrak{h})$ あるいは、より一般に、有限鏡映群の不変式環の構造はシュヴァレーが[23]で与えた。それは次のように述べられる。

定理　標数0の体K上のn次元線型空間V上の有限鏡映群Gで不変なV上の多項式函数の作る環Iは，n個の代数的に独立な同次式から生成される。

(この定理は，リー群の位相に用いられるだけでなく，対称空間上の不変微分作用素環の構造にも重要な役割を果すなど，リー群の表現論，調和解析でも大切な定理である。)

従って有限群$W(G)$の$\mathfrak{f}$上の不変式環の$I(\mathfrak{f})$の生成元の次数を求めることにより，Gのベッチ数は計算できる。(生成元のとり方は一意的でないがその次数は一意的に定まる。)

例えば$G=U(n)$のとき，$W(U(n))=S_n$ (n次対称群)である。$\mathfrak{f}$の自然な座標$x_1,\dots,x_n$をとると$W(U(n))$はこのn個の変数の置換からなる。従って$I(\mathfrak{f})$の生成元としては基本対称式，$\sum x_i$，$\sum_{i<j} x_i x_j,\dots,x_1\cdots x_n$がとれる。その次数は$m_1=1$，$m_2=2,\dots,m_n=n$であるから，$U(n)$のポアンカレ多項式は

(6)　　$P_{U(n)}(t)=(1+t)(1+t^3)(1+t^5)\cdots(1+t^{2n-1})$

となる。これからまた，$U(n)$から一次元の中心を除いた$A_{n-1}=SU(n)$のポアンカレ多項式が(1)でよえられることもわかる。同様に他の典型群B_n，C_n，D_nのポアンカレ多項式が(2)(3)(4)でよえられることもわかる。これは典型群ではワイル群が対称群かそれと$(2,\dots,2)$型アーベル群の半直積だから

である。例外群ではワイル群がもっと複雑になるので、典型群のようには行かない。

[15]では $\mathfrak{J}(\mathfrak{g})$ の性質と

(7) $\quad \sum_{i=1}^{l}(2m_i-1)=\dim G, \quad \prod_{i=1}^{l} m_i = \mathrm{ord}\, W(G)$

という一般的関係から例外リー群のベッチ数も計算できると述べているがその計算法は記されていない。その具体的計算法はボレルとの共著論文[26]に記されている。こゝでは[15]とは計算法が異なり、ハーシュの公式（ハーシュが予想し、ルレイ(42)とH.カルタン，コシュール，A.ボレル等が証明した）

(8) $\quad P_{G/U}(t)=\dfrac{(1-t^{2m_1})\cdots(1-t^{2m_l})}{(1-t^{2n_1})\cdots(1-t^{2n_l})}$

を用いる。こゝでUはGと同じ階数のGの閉連結部分群で、それらはボレル・ジーベンタール(5)によって、拡大ディンキン図形から決定されている。また $2n_1-1,\cdots,2n_l-1$ はUの冪指数である。この公式から直ちに次のことがわかる。

(9) $n_1,\cdots,n_l$ の内のk個が一つの整数cで割り切れるとき，$m_1,\cdots,m_l$ の内のk個もcで割り切れる。

[26]では，この(9)を巧みに用い，(7)のような一般的関係と合せて，各例外リー群の冪指数を決定している。ただし例えば F_4 の場合に，ケーリー射影平面（エルミット対称空間）の奇数次ベッチ数が消える等の既知の事実をいくつか用いて

いる。またE_8の場合は，計算がかなり面倒で，ワイル群の不変式に関する事実も用いている。序文で著者達は，「ここでの方法は，いろいろな知識を用いる点で *less satisfactory* であるが，計算は簡単になっている」と述べている。

コクセター（Duke Math. J. 18 (1951), p. 765）は，「ICM 1950 におけるシュヴァレーの講演[15]を聞いて始めて，以前に自分が(22)で導入したコクセター変換の固有値が，リー群のベッチ数に関係することを知った」と述べている。コクセター変換を利用することによって，[26]のように種々の事実を用いることなく，[15]の方針だけで，$I(\mathfrak{g})$の不変式の次数を求め，ベッチ数が計算できるようになった。これについては，ブルバキ(6)，ハンフリーズ(34)を参照。

さて以上はコンパクトなリー群の位相についてであった。コンパクトでないリー群の位相についての研究もE.カルタンに始まる。彼は対称リーマン空間の理論を用いて，非コンパクト連結半単純リー群Gは，その極大コンパクト部分群とユークリッド空間の直積に同相であることを示した。これを用いてカルタンは，一般に単連結リー群について，次の定理を得た(19)。

定理（E.カルタン）任意の単連結リー群Gは，いくつかの単連結コンパクト単純リー群（0個のこともある）と，ユーク

リット空間$\mathbb{R}^n$の直積に同相である。

このカルタンの定理は特に,「Gが単連結可解リー群ならば,Gは$\mathbb{R}^n$と同相である」という結果を含む。連結リー群Gの基本群は常に有限生成アーベル群であり,Gはその普遍被覆群$\tilde{G}$をその中心に含まれる離散部分群$\Gamma(\cong \pi_1(G))$で割って得られる: $G \cong \tilde{G}/\Gamma$.

シュヴァレーは[4]において次のことを示した。

定理 1. Gを単連結可解リー群とする。Gの中心に含まれる離散部分群Γが与えられたとき,Gのリー環$\mathfrak{g}$の基底$L_1, \cdots, L_n$であって,次の(1)(2)をみたすものが存在する:

(1) $(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \exp t_1 L_1 \cdots \exp t_n L_n$ は$\mathbb{R}^n$ onto Gの同相写像である.

(2) Γは自由アーベル群で$\operatorname{rank} \Gamma = r$のとき,$\{1, 2, \cdots, n\}$の部分集合$\{i_1, \cdots, i_r\}$が存在して$\exp L_{i_1}, \cdots, \exp L_{i_r}$は$\Gamma$の独立な生成元であり,$[L_{i_\alpha}, L_{i_\beta}] = 0$ $(\alpha \neq \beta)$である。

これから直ちに次のことが導かれる。

定理 2. 任意のn次元連結可解リー群Gは,$T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$と同相である。(ただし$T$は一次元トーラス)

この外,シュヴァレーはカルタンの主要結果の現代的な再証

明もあたえている。岩澤(37)にある半単純リー群の随伴群 $G=KAN$ と岩澤分解されるという結果(K=極大コンパクト部分群，ANは$\mathfrak{g}$の標準基底を適当な順(ルートの大きさの順)に並べたとき，Gに含まれる対角成分>0の上三角行列の全体，Aは対角行列)は，Gと$K\times R^n$が同相であることを示すだけでなく，ANが部分群となっているため，表現論で便利に用いられている。(37)にある証明はシュヴァレーのものであることが脚註に記されている。定理2は，マリツェフ(43)と岩澤(37)による「任意の連結リー群Gはその極大コンパクト部分群Kとユークッド空間R^nの直積と同相である。Gの任意の二つの極大コンパクト部分群は互いに共役である」という一般的定理の基礎の一つとなった。

なおシュヴァレーは，G=半単純の場合の極大コンパクト部分群の共役性についても一つの証明を与えた。これは岩堀(38)で紹介されている。

§6 第五問題

ヒルベルトは，その第5問題を「微分可能性または解析性の仮定なしにリー群論を建設することは可能か」という問題として提出した。1933年フォン・ノイマン(60)は，この形では反例があることを示し，「位相多様体である位相群G(以

下位相リー群という）はリー群か」という問題として定式化し，Gがコンパクトのとき，答はyesであることを証明した。

このフォン・ノイマンの論文が、今日言う意味での第5問題の出発点であり、大きな影響を与えた。シュヴァレーも，この論文とハール測度の発見に刺戟されて，[2]を発表した。ストーン(53)によって，ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の1パラメタ・ユニタリ群$U(t)$は，自己共役作用素Hにより，$U(t)=exp(itH)$ $(t\in\mathbb{R})$の形に表わされる。シュヴァレーは$iH=R$を無限小作用素と呼んでいる。[2]の主定理は，このストーンの定理を踏まえて，「ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有限個の無限小作用素（$=i\times$自己共役作用素）$R_1,\cdots,R_l$が，リー環の基底となっているとき，(即ち$[R_i,R_j]=\sum_k c_{ijk}R_k$）となっているとき)，$U_i(t)=exp\,tR_i\ (1\leq i\leq l)$は，局所リー群を生成する」というものであった。シュヴァレーの記述は，彼の他の論文と似ず荒削りの所がある。例えばR_jが一般に非有界作用素であることから来る困難さを十分意識していないようである。

そしてこの論文の最後に次の命題が証明できると述べられている：「可分な局所コンパクト群Gが，さらに局所連結であり，単位元1の近傍Vで$\{1\}$以外の部分群を含まないものを含むとき，Gはリー群である。」この論文の発表後間もなく，シュヴァレーは，自分の発見したこの命題の「証明」が不

完全であることを発見した。このことはH・カルタン (21) にシュヴァレーが語ったこととして注記されている。しかし上の命題に述べられたような、単位元の近傍 V を持つ位相群は、以後「小さな部分群を持たない群」と呼ばれ、第5問題の最終的な解決の鍵となったのである。

実数の加法群 $\mathbb{R}$ は小さな部分群を含まない。これはアルキメデスの原理からの直接の帰結である。非可換な一般なリー群 G でも、積 xy の標準座標は一次の近似では x と y の標準座標の和となる。このことからリー群 G も小さな部分群を持たないことが導かれる。一方 p 進体 $\mathbb{Q}_p$ のような非アルキメデス付値を持つ体の加法群は、小さい部分群を持つ。$\mathbb{Q}_p$ では p 進展開において、p^n 以上の項から成る元の集合を V_n とすれば、V_n は加法部分群で $(V_n)_{n\in N}$ が 0 の近傍系の基底を作るから、$\mathbb{Q}_p$ は小さい部分群を持つ。一般の非アルキメデス付値体でも同様である。さらに一般に完全不連結な位相群 G は、単位元 e のどんな近傍にも、G のコンパクトな開部分群 $H \neq \{e\}$ が含まれる。こうして局所コンパクト群の中には、アルキメデス的なリー群のグループと、非アルキメデス的な完全不連結群のグループが対立しているのである。第5問題とは、局所コンパクト群の中で、前者のグループを特徴付ける性質を求める問題と考えられる。

一般の局所コンパクト群の中での，この二つのグループの位置を示す手がかりとなるものとして，次のポントリャーギン(48)の定理がある。

定理（ポントリャーギン）有限次元rのコンパクト群Gの単位元の近傍Vで，r次元局所リー群Lと完全不連結なコンパクト正規部分群Nの直積となるものが存在する。（従ってGが局所連結ならば，$N=\{e\}$，$V=L$で，Gはリー群となる。）

オ5問題の研究によって，この定理の状態が，一般的な局所コンパクト群に対しても成立つことが最終的には言えたのであるが，その結論に到達するための道はそれ程簡単ではなかった。

オ5問題に対するシュヴァレーの最大の寄与は，可解群に対し，肯定的な解決を与えたことである。彼の定理は次の通りである。

定理1（シュヴァレー[3]）可解局所コンパクト群は，有限次元かつ局所連結ならば（従って位相リー群ならば），リー群である。

この[3]の掲載されたのは，ミシガン大学で行われたトポロジーのシンポジウムの報告集であり，戦争のため我国には来なかった。そして戦後数学書の輸入が始まった時には絶版になっていたのではないかと思われる。従ってこの[3]を筆

者は見ていない。しかし岩澤健吉は戦後 Math. Review でこのシュヴァレーの結果を知り、(36)において、その証明を与えた。岩澤の証明では、やはり上のポントリャーギンの定理に平行した結果が、可解局所コンパクト群に対して成立つことが基礎になっている。岩澤はこれからさらに進んで、リー群で近似できる局所コンパクト群としてL群という概念を導入した。岩澤のL群の理論は、ほぼ平行して行われたA.M.グリースン(28)のGL群の研究と共に、第5問題解決の基礎となった理論である。

シュヴァレー[17]はまた1949年のグリースンの「小さい部分群を持たない局所コンパクト群Gにおいては、単位元のある近傍Vにおいて、平方根をとる写像が定義され、しかもそれは一対一写像である」という結果(Bull. AMS 55 (1949))に触発されて、次の定理2を証明した。

定理2　小さい部分群を持たない任意の位相リー群Gにおいて、単位元のある近傍Vで一径数部分群で埋めつくされているものが存在する。

こうしてシュヴァレーは第5問題に、強い関心を抱き続けて来た。しかし1940年代後半から、この問題は多くの研究者によって熱心に研究されるようになり、良く知られているように岩澤，グリースン，モンゴメリー・ジピン，山辺英彦(72)(73)

等によって、1952−53年に最終的に第5問題は解決した。シュヴァレーは、この最終段階には加わらなかった。

上述のように第5問題は、局所コンパクト群のクラスの中で、アルキメデス的なもの、局所連結なものを特徴付ける問題と考えられる。一方、逆の方向のアプローチとして、1960年代以後、非アルキメデス的な完備付値体上でも、リー群と平行して解析群の理論ができることが示されたことは注目に値する。すなわち、セール(49)、ブルバキ(6)第3章等で、離散的でない完備付値体上でのリー群論が構成された。完全不連結なp進体Q_p上でもある所までは、RやCの上と平行した理論が成立つのである。

§7 結び

以上述べて来たシュヴァレーのリー群論における仕事をリー群論の研究史の中で考えて見よう。リー以来のリー群論の120年にわたる歴史は、次のように区分される。

第一期	1873年—1893年	(1893年リー「変換群論」第3巻出版)
第二期	1894 —1924	(1894年 カルタン学位論文(11)出版)
第三期	1925 — 1948	(1925年 ワイルの表現論(64)発表) (1948年 シュヴァレー[12] 発表
第四期	1947 — 1976	(1947年 ユニタリ表現論始まる
第五期	1977 — 現在	(1976年 ハリッシ・チャンドラ公式完成

第一期はリー，第二期はカルタンがそれぞれ代表的研究者であり，殆んど one man show に近い。第三期からは研究者が増え，多くの人によって重要な研究が行われるようになる。第三期はワイル(65)によって始まる。リー群論の大域的研究が開始されたのである。この時期の初期には，またカルタンが盛んに活動して居り，対称リーマン空間の大きな理論を作り上げている。このカルタンとワイルの大きな仕事を引き継いだのが，シュヴァレーを始めとする何人かの数学者である。従ってシュヴァレーの仕事には，カルタンの強い影響が見られる。これらの人人によって，リー群論の現代化がなし遂げられた。その現代化の内容の内，特に重要なのは次の二点であろう。

1．リー群をリーのように局所的変換群（芽）としてではなく，大域的な多様体としてとらえた理論を建設した。

2．（標数０の体上の）リー環論を，建設した。その場合単純環に対する個別的な検証ではなく統一的証明を与え，リー群論と独立に一貫した体系を樹立した。

１については[9]，２については[5][10][12]において，シュヴァレーは，基本的な貢献をした。彼によって上の１，２の二つの目標は，その骨組みができたのである。一方 1947 年には，ゲルファント・ナイマルクの $SL(2,\mathbb{C})$，バーグマンの $SL(2,\mathbb{R})$

のユニタリ表現論が発表され，リー群の無限次元表現論という新しい分野がはっきりとその姿を現わした。これが［13］発表の1948年でリー群論研究史の第三期が終るとした理由である。実際1950年以後では、こうしてできた現代的なリー群とリー環の理論を基礎にして、無限次元表現，線型代数群，等質空間の微分幾何，その位相幾何，リー群の離散部分群などの新しい研究分野が出現して来る。リー群・リー環自体の基礎的研究は、1950年以後もいくつかなされているが、やはりこの辺で時代は変ったと考えるのが適当であろう。そうしてシュヴァレーは、ワイルによって開かれた，リー群論史の第三期を完成させ、同時に線型代数群の理論という新しい分野の幕を開けた人と位置付けることができる。

The Publications of C.Chevalley on the group theory

[1] Groupes topologiques, groupes fuchsiens, groupes libres, C.R.Acad. Sci. Paris 192(1931), 724-726. (with J. Herbrand)

[2] Génération d'un groupe topologique par transformations infinitésimales, C.R. Acad. Sci. Paris 196(1933), 744-746.

[3] Two theorems on solvablle topological groups, Lectures on topology (University of Michigan), Univ. of Michigan Press, An Arbor, 1941, pp. 291-292.

[4] On the topological structure of solvable groups, Ann. of Math. 42(1941), 666-675.

[5] An algebraic proof of a property of Lie groups, Amer.J.Math. 63(1941), 785-793.

[6] A new kind of relationship between matrices, Amer. J. Math. 65(1943), 321-351.

[7] On groups of automorphisms of Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 30(1944), 274-275.

[8] On algebraic Lie algebras, Proc. Nat.Acad. Sci.U.S.A. 31(1945),195-196. (with H.Tuan)

[9] "Theory of Lie groups I", Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[10] Algebraic Lie algebras, Ann. of Math. 48(1947), 91-100.

[11] Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans.AMS. 63(1948), 85-124. (with S. Eilenberg)

[12] Sur la classification des algèbres de Lie et de leurs représentations, C.R.Acad.Sci. Paris 227(1948),1136-1138.

[13] Sur les représentations des algèbress de Lie simples,C.R.Acad.Sci. Paris 227(1948), 1197.

[14] The exceptional Lie algebras F_4 and E_6, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 36(1950), 137-141. (with D.Schafer)

[15] The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups, Proc.ICM 1950, Cambridge Mass. vol. 2, pp.21-24.

[16] Two proofs of a theorem on algebraic groups, Proc.AMS 2(1951),126-134. (with E.Kolchin)

[17] On a theorem of Gleason, Proc.AMS 3(1951), 122-125.

[18] "Théorie des groupes de Lie II", Hermann, Paris, 1951.

[19] Sur le groupe E_6, C.R.Acad.Sci. Paris 232(1951), 1991-1993.

[20] Sur une variété algébrique liée à l'étude du groupe E_6, C.R.Acad. Sci. Paris 232 (1951), 2168-2170.

[21] On algebraic group varaieties, J.Math. Soc. Japan 6(1954), 36-44.

[22] "The algebraic theory of spinors", Columbia Univ. Press, New York, 1954.

[23] Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J. Math. 77(1955), 778-782.

[24] "Théorie des groupes de Lie III", Hermann, Paris, 1955.

[25] Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J. 7(1955), 14-66.

[26] The Betti numbers of the exceptional groups, Memoirs AMS 14(1955), 1-9. (with A.Borel)

[27]"Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques", École Norm. Sup. Paris, 1956-1958. (with P.Cartier, M.Lazard, and A.Grothendieck)

[28] La théorie des groupes algébriques, Proc. ICM 1958, Edinburgh, Canbridge Univ.

Press, 1960, pp.53-68.
[29] Une démonstration d'un théorème sur groupes algébriques, J. Math. pure et appl. 39(1960), 307-317.
[30] Certains schémas de groupes semi-simples, Sém.Bourbaki 1960/61,no.219, Benjamin, New York, 1966.

References

(1) I.Ado, Über die Struktur der enndlichen kontinuierlichen Gruppen, (Russian with German summary), Izvestia F.M.O. Kazan 6(1934), 38-42.
(2) I.Ado, On the representations of finite dimensional continuous groups by means of linear transformations (Russian), Izvestiya F.M.O. Kazan 7(1934/35)), 3-43.
(3) A.A.Albert, A structure theory for Jordan algebras, Ann. of Math. 48(1947), 546-567.
(4) S.Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J.Math. Osaka City Unv. 13(1962), 1-34.
(5) A.Borel and J.Siebenthal, Les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos, Comm. Math. Helv. 23(1949/50), 200-221.
(6) N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, ch. 1, 1960, ch. 2 et 3, 1972, ch. 4,5 et 6, 1968, Hermann ,Paris(杉浦訳、ブルバキ,「数学原論」、リー群とリー環、1、2、3、東京図書).
(7) R.Brauer, Sur les invariants intégraux des variétés de groupes simples clos, C.R.Acad.Sci Paris 201(1935), 419-421.
(8) R.Brauer and H.Weyl, Spinors in n-dimensions, Amer.J.Math.57(1935)), 425-449.
(9) S.S.Cairns, Triangulation of the manifold of class one, Bull.AMS 41(1935), 549-552.
(10) E.Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Nony, Paris,1894.
(11) E.Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull.Soc.Math. France 41(1913), 53-96.
(12) E.Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, Ann.École Norm.Sup. 31(1914), 263-355.
(13) E.Cartan, Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, Bull.Soc.Math. France 49(1925), 361-374.
(14) E.Cartan, La géométrie des groupes simples, Annali Mat. 4(1927), 209-256.
(15) E.Cartan. Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemanienne, J.Math. pures et appl. 8(1929), 1-33.
(16) E.Cartan, Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos, C.R.Acad.Sci. Paris 187(1928),196-198.
(17) E.Cartan, Leçon sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
(18) E.Cartan, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann.Soc.pol.Math. 8(1929),181-225.
(19) E.Cartan, Topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, L'Enseignment Math. 35(1936), 177-200.
(20) E.Cartan," Leçon sur la théorie des spineurss I,II", Hermann, Paris, 1938.
(21) H.Cartan, "Sur les groupes de transformations analytiques", Hermann, Paris, 1935.
(22) H.S.M.Coxeter, Discrete groups generated by reflections, Ann. of Math. 35(1934),

588-621.

(23) G.de Rham, Sur l'analysis situs des variétéss à n dimension (Thèse), J.Math. pures et appl. 10(1931), 115-200.

(24) G. de Rham, (a) L'oeuvres d'E.Cartan et la topologie, Hommage à Elie Cartan, (b) Quelques souvenirs des années 1925-1950, "Oeuvres math". de de Rham, L'Enseignement math, Genéve,1981. pp.641-650, 651-668.

(25) J.Dieudonné and J.Tits, Claude Chevalley (1909-1984), Bull.AMS 17(1987), 1-7.

(26) P.A.M.Dirac, The quantum theory of electrons, Proc.Roy.Soc.London, 117(1928), 610-629.

(27) H.Freudenthal, Lie groups in the foundation of geometry,Advances in Math. 1(1964), 145-190.

(28) A.Gleason, The structure of locally compact groups, Duke Math.J. 18(1951). 85-104.

(29) Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, Trans.AMS 70(1951), 28-96.

(30) 服部昭、C.Chevalley 教授の東大における講演:新しい単純群について、数学 6(1954),42-45

(31) F.Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, de Gruyter, Leipzig, 1914.

(32) D.Hilbert, Über die Grundlagen der Geometrie, Math.Ann. 56(1902),381-422. Reprinted in "Grundlagen der Geometrie" 7th. ed. (寺阪英孝訳、「幾何学の基礎」、共立出版、pp,154-193)

(33) J.E.Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory", Springer, 1972.

(34) J.E.Humphreys, "Reflection groups and Coxeter groups", Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1990.

(35) 彌永昌吉編、「数論」、岩波書店、1969.

(36) 岩澤健吉、Hilbertの第5の問題、数学 1(1948),161-171.

(37) K.Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. 50(1949), 507-558.

(38) 岩堀長慶、対称リーマン空間の不動点定理、「微分幾何学の基礎とその応用」、数学振興会夏期セミナー第1集、1956,pp.40-60.

(39) N.Jacobson, Cayley numbers and normal simple Lie algebra of type G, Duke Math.J. 5(1937), 775-783.

(40) W.Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I-IV, Math.Ann. 31(1888), 252-290, 33(1889), 1-48, 34(1889), 57-122, 36(1990), 161-189.

(41) J.L.Koszul, Sur un type d'algèbres differentielles en rapport avec la transgression, Colloque de Topologie (Espaces fibrés) Bruxelles 1950, CRBM Liége et Paris, 1951, pp.73-81.

(42) J.Leray, Determination, dans les cas nonexceptionels, de l'anneau de cohomologie de l'espace homogènes quotient d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe de même rang, C.R.Acad.Sci. Paris 228(1949), 1784-1786.

(43) A.Malcev, On the theory of the Lie groups in the large, Mat.Sbornik 16(1945), 163-190.

(44) A.Malcev, On solvable topological groups (Russian), Mat.Sbornik 19(1946), 165-174.

(45) H.Poincaré, Analysis situs, J.l'École polytech. 1(1895), 1-123, Complément à analy-

sis situs, Rend.Circlo mat.Palermo, 13(1899), 285-343, Deuxième complément, Proc.London Math.Soc. 32(1900), 277-308, cinquième complément, Rend.Circlo mat. Palermo 18(1904), 45-110. (Oeuvres t. VI)

(46) L.S.Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième probleme de M.Hilbert, C.R.Acad.Sci. Paris 198(1934), 238-240.

(47) L.S.Pontrjagin, Sur les nombres de Betti des groupes de Lie, C.R.Acad.Sci. Paris 200(1935), 1277-1280.

(48) L.S.Pontrjagin," Topological groups", Princeton Univ.Press, Princeton, 1939.

(49) J.-P.Serre, "Lie algebras and Lie groups", 1964 Lectures at Harvard Univ., Benjamin, New York, 1965.

(50) J.-P.Serre," Algèbres de Lie semi-simples comlexes", Benjamin, New York, 1966.

(51) O.Schreier, Abstract kontinuierlichen Gruppen, Abh.Math.Sem. Hamburg 4(1925), 15-32.

(53) O.Schreier, Die Verwandschaft stetigen Gruppen im Grossen, Abh.Math.Sem. Hamburg 5(1926), 233-244.

(54) 杉浦光夫、リーとキリング・カルタンの構造概念、津田塾大学数学・計算機科学研究所報 No.1、19世紀科学史、1991,pp.76-103.

(55)杉浦光夫、ワイルの群論、津田塾大学数学・計算機科学研究所報 No.4、近現代数学史、1992,pp.68-97.

(56)高木貞治、「代数的整数論」、岩波書店、1948.

(57) J.Tits, Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionelles I, Indag. Math. 28(1966), 223-237.

(58)朝永振一郎、「スピンはめぐる、成熟期の量子力学」、自然選書、中央公論社、1974.

(59) van der Waerden, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, Math.Zeit. 37(1033), 446-462.

(60) J.von Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. 34(1933), 170-190.

(61) O.Veblen and J.H.C.Whitehead, "The foundation of differential geometry", Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1932(矢野健太郎訳、「微分幾何学の基礎」、岩波書店、1950).

(62) A.Weil, Géometrie différentielle des espaces fibrés, Oeuvres Scientifiques vol.1., [1949e] pp.422-436. Springer, 1980.

(63) A.Weil, Oeuvres Scientifiques vol.1, Commentaire [1951b]*, pp.577-578, Springer, 1980.

(64) H.Weyl, Die Idee der Riemannsche Flächen, Teubner, Sttutgart, 1913 (田村二郎訳、「リーマン面」、岩波書店、1974).

(65) H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I,II,III und Nachtrag, Math.Zeit. 23(1925), 271-309, 24(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

(66) H.Weyl, "The structure and representations of continuous groups", Mimeographed Notes taken by N.Jacobson and R.Brauer of lectures delivered in 1934-35, Institute for Advanced Study, Princeton.

(67) H.Weyl,"The classical groups, their invariants and representations", Princeton Univ.Press, Princeton, 1939.

(68) H.Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math. 37(1936), 645-680.

(69) J.H.C.Whitehead, On the decomposition of an infinitesimal group, Proc.Cambridge Philos.Soc. 32(1936), 229-237.
(70) D.J.Winter, "Abstract Lie algebras", MIT Press, Cambridge, Mass. 1972.
(71) E.Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, Abh.Math.Sem. Hamburg 14(1941), 289-322.
(72) Chi Ta Yen, Sur les polynomes de Poincaré des groupes de Lie exceptionelles, C.R.Acad.Sci. Paris 228(1949), 628-630.
(73) H.Yamabe, On the conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. of Math. 58(1953), 48-54.
(74), H.Yamabe, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math. 58(1953), 351-365.