エルミートのモジュラー方程式

笠原乾吉（津田塾大学）

0．Kroneckerは1857年「虚数乗法が生起する楕円関数について」([10])、1862年「楕円関数の虚数乗法について」([11])等を発表した。それは虚数乗法を持つ楕円関数の母数が満たす方程式（すなわち、特異モジュラー方程式）と２次形式類との関係を発見した画期的な論文である。これについては、前掲の論文[15]で高瀬正仁氏が、一部分の訳も付して内容、意義等を詳しく紹介されている。

しかし、Kroneckerは結果を言明しているだけで、証明をしているわけではない。当時どのように受けとめられていたか、1865年のSmithの言を借りよう([13] p.321)。

「・・・・この数年間にKronecker氏によって発見された重要な一連の結果は、２次形式に関する我々の知識の記憶すべき到達となり、数論研究に全く新しい分野を開いた。その証明は非常に複雑な種類の考察を必要とする。それはもっとも興味深いものの中に入ることは確かであるが、同様に数論的真理の中でもっとも難解なものの中に数えられるに違いない。彼の方法は非常に漠然とした風に示されているだけである。その後にでたHermite氏やJoubert氏の論文で、それに投げかけられた光りにもかかわらず、それを再発見するのは時々困難である。・・・・」。

ここでは、1859年のHermiteの論文「モジュラー方程式について」([4])を中心に話をしたい。

1．1858年以前　1832年遺書の中でGaloisは、素数pに対し周期のp等分にともなうモジュラー方程式はp＋1次であるが、p＝5，7，11のときには、１次下げてp次方程式に還元でき、p>11のときはこの還元は不能であると述べた。1846年のJ. Math. Pures Appl にGaloisの全集が発表されたが、そのすぐ後にHermiteはJacobiへの手紙の中でこれに触れている（３つの手紙がJ.reine angew.Math.40 (1850)に公

表．日付なしの２番目の末尾）。Bettiは1852年にGaloisの結果の注釈と完全化の論文を書き、翌1853年に論文「楕円関数のモジュラー方程式の次数低下について」を発表し、上記のGaloisの言明を証明した。（Bettiについては Kiernan [8] p.106, Gray [1] p.181, 182 から孫引き）。

Hermiteの関心は、この次数を１次下げた方程式を、具体的に表示することにある。そして長い間の試みの後、1858年に $p=5$ のときの表示式をみつけ、この表示式と５次方程式のJerrard（とBring）の標準型とを組み合わせて、モジュラー関数を用いての５次方程式の解法を発見した([3])。Hermiteがこの表示式を得るのに役立ったのは次の２つである。

一つはSohnkeによるモジュラー方程式の研究である(1836年 [14])。$u=\sqrt[4]{k}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$ 1) の関係として $p=3,5$ のときにJacobiが得たモジュラー方程式（1829年）を、Sohnkeは $7\leq p\leq 19$ の p に対して計算する。それからHermiteは n が奇素数のとき $\varepsilon=\left(\frac{2}{n}\right)$ として、モジュラー方程式は

$$\Theta(v,u)=(v-\varepsilon\varphi(n\omega))\prod_{m=0}^{n-1}\left(v-\varphi\left(\frac{\omega+16m}{n}\right)\right)$$

であると気づく。（翌年の[4]では、n が素数でなくても奇数のとき、モジュラー方程式の根は $\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\omega+16m}{\delta_1}\right)$ であるといっている。但し、$\delta\delta_1=n$, $\left(\frac{2}{\delta}\right)$ は平方剰余記号）。

もう一つは、ω を $SL(2,\mathbf{Z})$ の元で変換したときの $\varphi(\omega)$ の変換公式である。$ad-bc=1$ として、a,b,c,d の偶奇による組み合わせは６通りにわかれるが、例えば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2 \text{のとき、} \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)=\varphi(\omega)\exp\frac{i\pi}{8}\{d(c+d)-1\}$$

---

1) 記号については [7] p.27 をみよ。但し、そこで τ と書いたものを ω に、φ_1, ψ_1 を φ,ψ と変更。すなわち、母数 k に対する第１種完全楕円積分が K, 補母数 k' に対するそれが K', $\omega=iK'/K$, $q=\exp(i\omega)$, $u=\sqrt[4]{k}=\varphi(\omega)$, $\sqrt[4]{k'}=\psi(\omega)$ である。変換前後の新旧母数が k,λ で、$u=\sqrt[4]{k}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 2 \text{のとき、} \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \psi(\omega) \exp \frac{i\pi}{8} \{c(c-d)-1\}$$

等々である。Hermiteは1858年にはこの変換公式を書いているだけで証明はない。Smith (1865年 [13]) には、$\psi(\omega)$ の変換公式も付け加えられ、Jacobiによる $\varphi(\omega)$，$\psi(\omega)$ の q による表示式とテータ関数の変換公式から、証明が得られるであろうと書かれている。完全な証明は Königsberger(1871年 [9])、Schläfli(1870年 [12])による(雑誌の出版年は逆転しているが、Königsbergerの証明が先である)。また後年(1900年) に、HermiteはTanneryの手紙による質問に答えて、自分の証明の方法を説明している([6])。

これらを用いて、Hermiteは次のことを示す。$p=5$ のときのモジュラー方程式は

$$u^6 - v^6 + 5u^2 v^2 (u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4 v^4) = 0$$

という6次式で、その根は $u = \varphi(\omega)$ としたときに

$$v = -\varphi(5\omega), \quad \varphi\left(\frac{\omega + 16m}{5}\right) \qquad (m = 0, 1, \cdots, 4)$$

である。

$$\Phi(\omega) = \left[\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+4\cdot16}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+2\cdot16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+3\cdot16}{5}\right)\right]$$

とおくと、F と u の間に

$$\Phi^5 - 2000u^4(1-u^8)^2\Phi - 1600\sqrt{5}u^3(1+u^8)(1-u^8)^2 = 0$$

という5次式が得られ、これが求めるものである。

この後、1858年12月7日のBrioschiへの手紙で、Hermiteは同様な方法で $p=7$ に対する8次のモジュラー方程式の7次式への還元を実行している([5])。

2．Hermiteの「モジュラー方程式論について」(1859年)

この論文([4])は45頁で、Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 48巻、49巻に6回にわけて発表された。まず、序文を要約しよう。「・・・私は長い間、12次のモジュラー方程式の11次への還元ができなかった。それは、代数方程式の判別式の計算は多くの場合実行不可能で、判別式の計算をしながら、低次化を実現するために用いられる根の関数を

作ることが難しかったからである。それで、根の超越的な形の表現を出発点にとり、私が目をつけた場合には少なくとも実行可能な計算に到達する期待のもとに、一般的にモジュラー方程式の判別式を研究することを試みた。」そしてそれができて、その研究が「ある条件を満たす２次形式の類数の和についてその命題を導くことをみた。」ここでKroneckerの1857年の論文[10]に触れ、「他の原理にもとづきながら、Kronecker氏の命題とともに、数論のより重要な理論の一つに新しい光を投げかけて、代数学と超越的な解析とを結び付ける」ことが目的という。

本文は1節から16節にわかれる。まず、モジュラー方程式$Q(v,u)=0$の判別式Dが

$$D=u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}(b_0+b_1u^8+\cdots+b_\mu u^{8\mu}),$$

$$b_i=b_{\mu-i},\ \varepsilon=\left(\frac{2}{n}\right),\ \mu=\frac{1}{4}(n^2-1)-(n+\varepsilon)$$

と表せることと、Jacobiによる新旧母数k,λと乗法子Mの関係式

$$M^2=\frac{1}{n}\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)}\cdot\frac{dk}{d\lambda}$$

を基礎とし、Dが完全平方式であることを示す。そして、

(1) $$D=u^{n+1}(1-u^8)^{n+\varepsilon}\theta(u)^2,\qquad \theta(u)=a_0+a_1u^8+\cdots+a_\nu u^{8\nu}$$

と表す。($a_i=a_{\nu-i}$ になっている。 $\nu=\frac{1}{8}(n^2-1)-\frac{1}{2}(n+\varepsilon)$.)

$\theta(u)=0$ の根を $u=\varphi(\omega)$ ($=\sqrt[4]{k}$) と表すと、ω は判別式負の整数係数２次式 $P\omega^2+2Q\omega+R=0$ の根になる。Dが完全平方になるところまで(１節)は証明があるが、この２次式があらわれる2節以後は証明がほとんどなく、結果の言明だけである。2節と4節のそれぞれ一部について、この論文が$\varphi(\omega)$の変換公式を書いた５次方程式の論文([3])の後であることを手がかりに、考察しておこう。

$\varphi^8(\omega)=k^2$ が

$$\Gamma(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})\ :\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\bmod 2\right\}$$

に対し、

$$\varphi^8(\omega)=\varphi^8(\omega')\ \Leftrightarrow\ {}^{\exists}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma(2),\ \omega'=\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$$

であることはよく知られている。(たぶん、Gaussも知っていた)。

Hermiteの$\varphi(\omega)$の変換公式から、

$$\varphi(\omega)=\varphi(\omega') \Leftrightarrow {}^{\exists}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)\ ,\ \exp\frac{\pi i}{8}\{d(c+d)-1\}=1\ ,\ \omega'=\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$$

である。

$u=\varphi(\omega)$としたとき、モジュラー方程式$Q(v,u)=0$の根は

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)\ ,\ \varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right) \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

であるから、uが判別式の根であるための条件は

$$\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega+16k'}{n}\right)$$

または

$$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right) \quad (k,k'=0,1,\cdots,n-1,\ k\neq k')$$

が成り立つことである。

(2) $$\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega+16k'}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega+16k'}{n}=\frac{c+d\dfrac{\omega+16k}{n}}{a+b\dfrac{\omega+16k}{n}}\ ,$$

(ただし、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は上記のもの)

$$\Leftrightarrow b\omega^2+(na+16bk+16bk'-nd)\omega+(16nak'+16^2bkk'-n^2c-16ndk)=0$$

を得る。後者の場合は、

(3) $$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right) \Rightarrow \varphi^8(n\omega)=\varphi^8\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow n\omega=\frac{c+d\dfrac{\omega+16k}{n}}{a+b\dfrac{\omega+16k}{n}} \quad \left({}^{\exists}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma(2)\right)$$

$$\Leftrightarrow nb\omega^2+(an^2+16bnk-d)\omega-16dk-cn=0$$

となる。これで、判別式の根uを$u=\varphi(\omega)$としたとき、ωは整係数2次式

$P\omega^2+2Q\omega+R=0$を満たすことがいえた。$-\Delta=Q^2-PR$とおくと、

(2)のときには

$$-4\Delta=\{(a+d+2)n-16b(k'-k)\}\{(a+d-2)n-16b(k'-k)\}\ ,$$

(3)のときには

$$-4\Delta=(an^2+16bkn+2n+d)(an^2+16bkn-2n+d)$$

である。

(2),(3) の２次式を mod n で考えると

$$(2)\text{ は } b\omega^2+16b(k+k')\omega+16^2bkk' \equiv 0\ ,\quad \therefore \omega\equiv -16k\,,\,-16k'$$

$$(3)\text{ は } -d\omega-16dk\equiv 0\ ,\quad \therefore \omega\equiv -16k$$

となる。これから、モジュラー方程式 $\Theta(v,u)=0$ の判別式の根 $u=\varphi(\omega)$ に対し、ω の満たす２次式 $P\omega^2+2Q\omega+R=0$ を mod n で考えた根により、$\Theta(v,u)=0$ のどの根とどの根が一致するかが決まることになる。したがって、$\Theta(v,u)=0$ の重根は２重根だけで３重以上の根はない ([4] p.49) 。

同じ頁に、$\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)$ のときに、ω をとりかえ、$u=\varphi(\omega)=\varphi(\omega')$、かつ $\varphi\left(\frac{\omega'+16j}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j'}{n}\right)$ とできる。つまり (2) は (3) に還元できるという記述がある。この証明は次のようにしてできる（方針だけかく）。

任意の $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma(2)$ に対し、

$$(4)\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & 0\\ 16j & 1\end{pmatrix}\quad (\text{但し }\beta\not\equiv 0 \bmod n\text{ と仮定})$$

$$\begin{pmatrix}n & 0\\ 16k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & 0\\ 16j' & 1\end{pmatrix}$$

(但し $16k\beta+\delta\not\equiv 0 \bmod n$ と仮定)

という $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}\in\Gamma(2)$ がとれることを示す。

$\beta=2$, $\delta=-32k+1$ とすると、$\alpha\delta-32\gamma'=1$ に α,γ' がとれ、$\gamma=16\gamma'$ とおく。この $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に対し、上の $\alpha',\cdots,\delta''$ を作る。

条件の式に $\omega=\dfrac{\gamma+\delta\omega'}{\alpha+\beta\omega'}$ を代入すると、

$$\varphi(n\omega)=\varphi\left(\frac{\gamma'+\delta'\dfrac{\omega'+16j}{n}}{\alpha'+\beta'\dfrac{\omega'+16j}{n}}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j}{n}\right)\exp\frac{\pi i}{8}\{\delta'(\gamma'+\delta')-1\}\ ,$$

同様に

$$\varphi\left(\frac{\omega+16k}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j'}{n}\right)\exp\frac{\pi i}{8}\{\delta''(\gamma''+\delta'')-1\}$$

を得る。これから $\varphi\left(\frac{\omega'+16j}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\omega'+16j'}{n}\right)$ が仮定より得られ、$\varphi(\omega)=\varphi(\omega')$ も確かめられる。

さて、Hermiteはモジュラー方程式の判別式(1)の零点、すなわち、$u\neq 0,\ u^8\neq 1$ として、$\theta(u)=0$ の根 $u=\varphi(\omega)$ に対応する ω が満たす2次式をすべて求めようとする。

ω の満たす2次式を

(a) $P\omega^2+2Q\omega+R=0$

とし、(P,Q,R) とも略記し、$-\Delta=Q^2-PR$ とおく。

$\theta(u)$ の次数は $8\nu=8\{\frac{1}{8}(n^2-1)-\frac{1}{2}(n+\varepsilon)\}$ なので、その根も 8ν 個あり、対応する 8ν 個の ω が満たす(a)の形の方程式の求め方をHermiteは調べ、$3\leq n\leq 29$ の奇素数 n に対し結果をかく。

まず、$\varphi(\omega)$ が $\theta(u)=0$ の根のとき、$\varphi(\omega+2m)=\exp\left(\frac{\pi i}{4}m\right)\varphi(\omega)$ も根なので（これは $\theta(u)$ が u^8 の式であるということ。直接には $\Theta(v,u)$ の2根が等しいとおいて(4)のような式を作り証明できる）、$\omega+2m$ $(m=0,1,2,\cdots,7)$ の満たす方程式は一つのグループを作り、これで 8ν 個の方程式は8個づつのグループにわかれる。以後は、$u^8=\varphi^8(\omega)$ の異なる値だけに注目し、それに対する ν 個の方程式を求める。

$u=\varphi(\omega)$ が $\theta=0$ の根のとき、$\varphi\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)$, $\varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{1-\omega}\right)$, $\varphi(\omega-1)$, $\varphi\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$ のすべてが $\theta=0$ の根になる場合があり、このときこの6個をまとめて、6つの方程式が1つのグループを作る場合（イ）という。そうでないときは、$u=\varphi(\omega)$ が $\theta=0$ の根なら $\varphi\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)=\frac{1}{\varphi(\omega)}$ も根なので、ω とその ω に対する $\frac{\omega}{1+\omega}$ とが満たす2次式をまとめて、2つの方程式がグループを作る場合（ロ）という。

ただし、$m\equiv 1 \mod 4$ のときは $(c,0,c)$、$m\equiv 1 \mod 3$ のときは $(2c,c,2c)$ の形からは例外が生じる。（例えば、$m\equiv 1 \mod 3$ のときは、θ は $u^{16}-u^8+1$ の形の

因数をもつ）。

さて、Δは2つの組にわかれ

第1組　：　$\Delta=(8\delta-3n)(n-2\delta)$　，　$\frac{3}{8}n<\delta<\frac{n}{2}$

第2組　：　$\Delta=8\delta(n-8\delta)$　，　$0<\delta<\frac{n}{8}$

である。各組でΔ，δの条件により、いつ場合（イ）、（ロ）にわかれるかがいえる。

以上が、5節までの要約であるが、コメントをつけ加える。第1組と第2組にわける所は私にはわからず、Smith([13] p.345)の記述をみると、もう一つ $\Delta=\delta(n-16\delta)$ が落ちているかもしれない。2次形式の還元理論が出発点になっているわけで、それは $SL(2,\mathbb{Z})$ による同値の話であり、一方、$\varphi^8(\omega)$ は $\Gamma(2)$ について保型的である。$SL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(2)$ は6個の元よりなり、それを ω に作用させたのが、$\frac{\omega}{1+\omega}$，$-\frac{1}{\omega}$，$\frac{1}{1-\omega}$，$\omega-1$，$1-\frac{1}{\omega}$ である。

6節のはじめで、虚数乗法をもつ楕円関数の母数（つまり、特異母数）は虚2次無理数 ω に対する $k^2=\varphi^8(w)$ であり、その全体はモジュラー方程式の2重根を与える $u^8=\varphi^8(\omega)$ の全体であるという。

整係数2次式 $A\omega^2+2B\omega+C=0$（(A, B, C) とかく）の判別式を $-\Delta=B^2-AC<0$ とする。A,B,Cの最大公約数が1のとき原始的であるといい、さらにA,2B,Cの最大公約数が1か2かにしたがって固有的、非固有的という。

$\Delta\equiv1 \mod 4$ のときに、判別式 $-\Delta$ の固有原始的な2次式の根 ω に対する $\varphi^8(\omega)$ の異なる値をすべてとり、それを根とする方程式を $F_1(x,\Delta)$ とかく。$\Delta\equiv2 \mod 4$ のときの同様のものを $F_2(x,\Delta)$、$\Delta\equiv3 \mod 8$、$\Delta\equiv-1 \mod 8$ のときにそれぞれ今度は非固有原始的なものについて同様のものを作り $\mathfrak{F}_1(x,\Delta)$，$\mathfrak{F}_2(x,\Delta)$ とおく。これらはいずれも整係数多項式で、$\mathfrak{F}_2$ は最高次係数が2のべき、他のものの最高次係数は1、次数は $\mathfrak{F}_1$ は類数の6倍、他のものは類数の2倍である。

これらはまさに高瀬氏のいう特異モジュラー方程式であるが、Hermiteは証明なしに次のことを言明し、それにしたがって例を計算する。奇数 n に対し n 位のモジュ

ラー方程式 $\Theta(u,v)=0$ に対し

$$1^\circ \qquad u^4=\frac{v^4-1}{v^4+1}, \qquad u^8=x$$

$$2^\circ \qquad u^4=-\frac{v^4-1}{v^4+1}, \qquad u^8=x$$

$$3^\circ \qquad u^8=\frac{1}{1-v^8}, \qquad u^8=x$$

$$4^\circ \qquad u^2=\frac{1-v^4}{2iv^2}, \qquad u^8=1-x$$

という代入を行って x の方程式を作る。そのとき、その各々は次の形の因子の積である：

1° $F_1(x,\Delta)$ （Δ は $2n-1, 2n-9, 2n-25, \cdots$）

2° $F_2(x,\Delta)$ （Δ は $2n, 2n-4, 2n-16, \cdots$）

3° $\mathfrak{F}_1(x,\Delta)$ （Δ は $4n-1, 4n-9, 4n-25, \cdots$）

4° $\mathfrak{F}_2(x,\Delta)$ （Δ は $8n-1, 8n-9, 8n-25, \cdots$）。

例えば、$n=7, n=11$ としてモジュラー方程式に 1° を行うと、それは $F_1(x,13)\cdot F_1(x,5)$, $F_1(x,21)\cdot F_1(x,13)$ と因数分解され、その共通因子として $F_1(x,13)$ が計算できる。

方程式 $\mathfrak{F}_1$ は、前の6つの方程式がグループを作る場合（イ）に対応していて、$\varphi^8(\omega)=\rho$ とおくと、ρ, $\frac{1}{\rho}=\varphi^8\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)$, $1-\rho=\varphi^8(-\frac{1}{\omega})$, $\frac{1}{1-\rho}=\varphi^8\left(\frac{1}{1-\omega}\right)$, $\frac{\rho}{\rho-1}=\varphi^8(\omega-1)$, $\frac{\rho-1}{\rho}=\varphi^8\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$ がグループとなる。結局、$\mathfrak{F}_1(x,\Delta)$ はこれらを根とする $(x^2-x+1)^3+\alpha(x^2-x)^2$ という形の因数の積に分解できる。F_1, F_2 の場合には、ρ と $\frac{1}{\rho}$ とで2つの方程式のグループを作る場合（ロ）であるが、実は ρ, $\left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\right)^2$, $\frac{1}{\rho}$, $\left(\frac{1+\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}}\right)^2$ の4つでグループを作り、$(x+1)^4+\alpha x(x-1)^2$ の

形の因数に分解される。このときは類数が必ず偶数になり、F_1, F_2の次数は4の倍数である(4節)。Δが4で割り切れるときなどの特異モジュラー方程式も論じている(7節)。

こうして、nを与えたときに現われるΔは第1組、第2組の議論でわかり、Δに対する特異モジュラー方程式は1°～4°などの議論でわかる。これでモジュラー方程式の判別式の計算は実行できるわけで、12節でn＝11のときのそれが計算される。(しかし、この重要な2点が、私にはまだ解明ができない)。

このあと、いよいよn=5,7,11のときにモジュラー方程式の次数を1次下げる話に進み、最後の16節でその方程式を具体的に書き下しているが、この部分は省略する。なお、14節では、このHermiteの結果を別の方法で1853年に得ていたという、1859年5月24日付けのBettiの手紙が紹介されている。

3. 私が大変不思議に思うことがある。それはKronecker, Hermite達は証明なしに結果を言明しているだけなのに、当時の人々はそれを正しいことと受け入れ、疑いを持っていないように見受けられることである。一方、Dedekindは1887年のJ(t)を発見した論文の末尾で、J(t)に関するモジュラー方程式$F_n(X, Y)=0$に対し、$F_n(X, X)$かまたは$F_n(X, Y)$の判別式を調べることにより、特異母数が得られるであろうが、それらについては後日を期する、といっている。Dedekindの態度は、納得いく証明が公表されていないものは信じないという、今日の数学者の考え方に近いと思う。事実の発見ということ、その証明、そして証明を公表するということについての態度が、1850年頃からの30年位の間に、大きく変化していると思う。

ただ、Hermiteについては、時代以上に彼の性格も影響しているのかも知れない。Hadamard([2], p.109)は、「彼は幾何に対してある種の積極的な嫌悪を感じていて、私が幾何的な論文を書いたときに、もの珍しそうに非難したことがある」と書いたあとで、次のようにいっている。「方法はいつも何か神秘的な具合に彼の心に

生まれるように思えた。彼のソルボンヌでの講義に我々は絶えず熱心に出席したが、彼は「この公式から出発しよう」といって話を始めることを好んだ。そしてその公式を書くのだが、それが正しいことは確かだけれど、それが頭の中にどのように浮かんだのか、発見の方法は説明しないし我々には推測することができなかった。」

残念なことに、私には正しいことを確かめることさえ、まだ終わっていない。

文献

[1] J. Gray, Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré, Birkhäuser, (1986).

[2] J. Hadamard, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton Univ. Press, (1945). (Dover Publ. Inc., (1954)).

[3] C. Hermite, Sur la résolution de l'équation du cinquième degré, C. R. Acad. Sci. Paris, 46 (1858). 全集第2巻, 5 - 12.

[4] C. Hermite, Sur la théorie des équations modulaires, ibid. 48, 49 (1859). 全集第2巻, 38 - 82.

[5] C. Hermite, Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré, Brioschi氏への手紙 (1858). 全集第2巻, 83 - 86.

[6] C. Hermite, モジュラー関数についてのTannery氏への手紙 (1900), 全集第2巻, 13 - 21.

[7] 笠原乾吉, モジュラー方程式について(続), 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, 4 (1992), 26 - 31.

[8] B. M. Kiernan, The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin, Arch. History of the Exact Sciences, 8 (1972), 40 - 154.

[9] L. Königsberger, Die linearen Transformationen der Hermite'schen f - Functionen, Math. Ann., 3 (1871), 1 - 10.

[10] L. Kronecker, Über die elliptischen Functionen, für werche complexe Multiplication stattfindet, 29. Oct. 1857, 全集第４巻, 179 - 183.

[11] L. Kronecker, Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen, 26. Juni. 1862, 全集第４巻, 207 - 217.

[12] L. Schläfli, Beweis der Hermiteschen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen, J. reine angew. Math., 72 (1870), 360 - 369.

[13] H. J. S. Smith, Reports on the theory of Numbers, Part VI, Report of the British Association for 1865, 選集第１巻, 289 - 358.

[14] L. A. Sohnke, Aequationes modulares pro transformatione Functionum Ellipticarum, J. reine angew. Math., 16 (1836), 97 - 130.

[15] 高瀬正仁, クロネッカーの数論の解明, 津田塾大学 数学·科学研究所報, 6(1993), 1 - 18