含意について

足立恒雄（早稲田大学理工学部）

§１　数学における含意の導入

含意ｐ⊃ｑを¬ｐ∨ｑと解釈するのは自然言語の感覚からはずれたところがあるので、数学の入門書ではいくつか工夫を凝らしている場合が多い。

適当な日常生活上の実例を挙げて¬ｐ∨ｑが妥当で自然な解釈なのだとしている本もある（例えば、松坂和夫『数学序説』）。これは算術を物との対応で説明するのと軌を一にしているのだが、含意の場合はあまり成功を収めない。例えば、

「悪魔が大統領に選ばれるならば、米国国民の精神的幸せに資するところ大である」

というパースの挙げた例によっても知られるとおり、前件が偽だから推論は正しいというのが果たして「自然である」といえるか疑問である。

また、ｘ＞５⊃ｘ＞２あるいは

∀ｘ［ｘ＞５⊃ｘ＞２］

によって「偽⊃偽」および「偽⊃真」が正しい推論であることを理解させる方法がある（例えば、［Ｌｕ］）。これは後に説明するようにformal implicationと呼ばれる場合なので説得的ではあるが、しかし、

∀ｘ［ｘ＜５⊃ｘ＜２］

という偽命題にも「偽⊃偽」という組み合わせは起こり得るので、「偽⊃偽」が正しい推論であるという証拠にはなり得ない。

もっと歴史的考察をも加え、なぜ数学では含意ｐ⊃ｑを¬ｐ∨ｑと定義して構わないのか考えてみる必要があるのではないだろうか。

§２　古代における仮言命題（Hypothetical Proposition）

Cicero, Sextus Empiricus（２Ｃ頃）等の伝えるメガラ派のDiodorusとPhilo の大論争（BC.3C:［Ｋ－Ｋ］p.130fによる）。この論争は世間で大変有名であったので、烏さえもが条件文の性質をカーカー論じているという詩があるという。Zenoによる、" If P then q. If p then¬q. Therefore it is impossible that p. " という論法からconditionalsに注意が向けられるようになったと思われる（パラドクスに対する関心）。正統な、つま

りプラトン、アリストテレスの流れからは含意に関する特異な主張は出なかった。

Philo は現在言う真理関数的な仮言命題を主張したとSextus Empiricusは伝えている：「フィロンは言う；真に始まり、偽に終わるのでなければ、条件文は正しい（sound)、例えば、今昼で、私が議論しているとしたら、『今昼ならば、私は議論している』はsoundである。Diodorusは言う；真に始まり、偽に終わることができない、あるいはできなかった条件文がsound である。だから、今昼で、私が沈黙してしまったとき、先の文は真に始まり、偽に終わるので、偽である。ところが、次は真であろう；『原子が存在しないならば、原子は存在する』。なぜなら、これは偽に始まり、真で終わるからである」。これに続いて『今は昼ならば、今は昼である』が真と主張する派と偽と主張する派の意見が紹介されている。

つは単なる命題を合成して複合命題を作るだけだと解釈するか、前件から後件が帰結されていると解釈するかで、以後長く論争が続いたが、科学用の記述言語としては自然言語は欠陥があるから、真理関数的に定義するのが単純明解で都合が良いというFrege の見解が今ではごく一般的な見方である。しかし、科学という言葉の意味は非常に広がっているから、社会問題、言語、人工知性の問題を扱う立場から言えば、自然言語との関連は無視できないと考えられるので、現在でも条件文の問題がなくなったわけではない。

［Ｐ］ではDiodorusは常識的な解釈（論理的連鎖）を考えたとし、ヨーロッパ語ではこうとるのが当然であるとしている。

論理的に帰結できるときに、ｐつｑであると定義してみよう。

斜辺と辺がcommensurable ならば、偶数が奇数と等しい。

は論理的連鎖がないように見えるけれども、実は　２が無理数であることを証明するときに現れる。俗にも

風が吹けば、桶屋が儲かる

という例がある。そういうわけでフィロン派は全知という状態で何を意味するかを考えることで仮言命題の研究をすべきだと主張してきた（［Ｐ］）。

例文（５）のように具合の悪い場合もあるが、その具合の悪さは重要ではない。しかしDiodorusの見解がうまく修正できれば、より好ましいものになるかもしれない（［Ｐ］）。

真理値を考える際、ｐが偽の場合は真理値がない（真でも偽でもない、その場合は何も述べていない）とすれば常識的なようなものだが、それでは対偶が真であるということが言えなくなる。数学的に考えても、関数に値がないというのは都合が悪い。

§３　自然言語の条件文の論理学的解釈に困難が伴う理由

条件文の解釈が難しい理由をいくつか挙げてみよう：

(1) ぴったりした否定形がない。

(2) 前件、後件の真偽が分かっている場合には通常は条件文を使わない。

(3) 用法が多様である。

(4) 前件と後件が無関連な場合に条件文を作ることは少ない。

(1) について：条件文は誘導推論を伴いがち。数学における例では、誘導推論は起こしにくい。否定文は理由文や、事実的、あるいは仮定的譲歩文などとなる（用例参照）。

(2) について：前件、後件の真偽が定まっている場合は理由文、譲歩文、仮定的条件文などが用いられる（用例（１）参照。これはタルスキの本から引用）。

(3) について：用例参照。これを一貫した背後にある論理の流れを見つけ出して説明する試みは認知科学で試みられている（例えば［Ｓ］）。

(4) について：用例（４）などはナンセンス。

自然言語では暗黙の前提、知識などが数多く存在する。また間違い易さの度合いが対象となる文の抽象度、なじみ易さなどによって大変異なる。人間は論理で理解したり、説得したりしているのではないらしい。だから機械に会話をさせるためには論理を教えこんでもほとんど意味がない。しかし、自然言語の背景にある論理はどういうものかは興味のあるところである。

(4) のように前件と後件が無関連な場合に「ならば」という言葉を使うことには、心理的抵抗があって、これが特に素人に真理関数的な定義を受け入れがたくさせている原因の一つとなっているが、そのほかにも偽からは任意の命題が帰結される（任意のＢに対して $A \wedge \neg A \supset B$ ）というのも真理関数的定義を不愉快にしている原因であろう。これについては、後述。

§４　Principia Mathematica －material implicationとformal implication

ＰＭにおいて $p \supset q$ は $\neg p \vee q$ で定義されている。これはすでに珍しいことではなく、中世以来の伝統を経て、単純にして明快な定義がしだいに優勢となっていったのである。

「ｐでかつｐ⊃ｑならば必然的にｑを得ることから、ｐ⊃ｑはp implies q と読むことにする」。さらに

$$(x)[p(x) \supset q(x)]$$

なる場合 p(x) formally implies q(x) という。formal implizationによって含意の定義の持つ不愉快さがかなり程度解消されることは事実である。formal implicationと区別して先のｐ⊃ｑはp materially implies qという（実質含意と訳されているが、物質含意というのが原意に近いのではないだろうか）。これらは［W－R］の命名であるが、その由来を推測してみよう。

中世における推論形式の研究にconsequentiaという理論があった。代表的人物としてはOckham,Pseud-Scot 。consequentiaにはmaterialisとformalisの２種類があった。中世ラテン語のformalisにはproperという意味があるという（以上［K－K］による）

materialisがどういう意味を持つのかはわからないが、実質という意味でないことは確かである。

なおScot（とされている人物）は矛盾からはどんな命題でも従うことを次のように証明している：

①「ソクラテスは存在する」ならば「ソクラテスは存在するか、あるいは人間は驢馬である」が成り立つ。

②「ソクラテスは存在するか、あるいは人間は驢馬である」が成り立つとして、「ソクラテスは存在しない」を仮定すれば「人間は驢馬である」ということになる。

③故に「ソクラテスが存在し、かつソクラテスは存在しない」ならば、「人間は驢馬である」が成り立つ。

ラッセルは講演途中で「1=0 ならあなたは法皇であることを証明してくれ」と言われて即座に証明したというような話を読んだことがあるが、ラッセルはこういう古典に通じていたのではなかろうかと思われる。

Scotの証明は大変説得的であるから、ｐ∧¬ｐ からｑが帰結されることを否定するためには大きな代償を払わねばならないことを示している。この命題は、仕方なく認めている煩わしいものではなく、それ自身正しい原理の反映であると考えたい。「そんな間違ったことを認めたら、どんなことでもして良いということになりますよ」と言いたい気持を反映する原理を含んでいるというべきである（以上［H－C］による）。

例えば、「ｐならばｐ∨ｑ」は無駄な推論で、こんな推論は実際には使われないように

見えるけれども、数学ではしばしば現れる推論である（［G］参照）。

§5　様相論理

1912年以降、Lewis はＰＭにおけるmaterial implicationの概念に不満を表明して、一連の論文と著書を出版した。含意にはもっと強い意味があるとして、strict implication（厳密含意）の概念を導入した。［Ｌ－Ｌ］では可能性を原始様相記号として採用している。

Ackermann は厳格含意（rigorous implication）の概念を導入している（［Ｈ－Ａ］に簡単な解説がある）。この体系では $p \wedge \neg p \Rightarrow q$ は証明できない。

§6　古典数学における含意

古典数学ではニュアンスというものは考慮されていないから、誘導推論が起きにくいので、条件文の否定命題が作りやすい。つまり、$p \supset q$ の否定は（背理法による証明を振り返ればわかるように）$p \wedge \neg q$ である。故に、この形の否定命題を取って、$p \supset q$ の定義を $\neg p \vee q$ とすれば良いことがわかる。数学の入門を講じるに際して、古典数学ではこの形式でしか含意を使わないことを何度か確認すれば納得が行くはずである。

<u>条件文用例</u>

（１）Every metal is malleable.

If x is a metal, then x is malleable.

Since iron is metal, it is malleble.

Although clay is not a metal, it is malleable.

If wood were a metal, then it would be malleble.

（２）１万円くれたら、あなたに投票する。

（否定は「たとえ１万円もらっても、あなたには投票しない」か？）

（３）フランスの現在の王様ははげである。

（４）２が３より大きければ、東京は日本の首都である。

（５）もし君がフェルマー問題を解いたら、逆立ちして世界一周するよ。

（６）彼が謝罪するなら、彼の無礼を許してやろう。

（誘導推論）彼が謝罪しないなら、彼の無礼は許してやらない。

(7)（誘導推論を起こさない例）フランスにいったら、まずルーブル美術館を訪れる。

(8)（理由文）おまえが警察に知らせたから、子供は死んだのだ。

（誘導推論）おまえが警察に知らせなかったら、子供は生きているはずだ。

(9)（無関連）300 円持っていれば、100 円のりんごが２個買えるね。

（否定）300 円持っていなくても、100 円のりんごは２個買えるさ。

(10)（誤解）甘いものをたくさん食べれば、歯が丈夫になる。

（否定）冗談じゃない、甘いものをたくさん食べれば、歯が悪くなるよ。

(11)（過大評価）ナポレオンが原爆を持っていたら、戦争に勝っていただろう。

（否定）いや、ナポレオンには原爆の使い方が分からなかったさ。

(12) 神が存在しなければ、この世は空しい。

神が存在しなくても、この世は空しいとは限らない。

神が存在しても、この世は空しい。

神が存在しようがしまいが、そんなことはこの世が空しいかどうかに関係ない。

(13)（疑似条件文）よろしかったら、冷えたビールもありますよ。

文献

[K－K]　W.kneale-M.Kneale, The Development of Logic, Oxford, 1962

[P]　C.Peirce, Collected Papers, Harvard, 1933, vol.III, 441-444

[F]　G.Frege, Collected Papers on Mathematics,Logic,and Philosophy, Basil Blackwell, 1984

[Ru]　B.Russell, The Principles of Mathematics, London, 1903

[W－R]　A.N.Whitehead-B.Russell, Principia Mathematica I- III , Cambridge, 1910 -13

[Lu]　ウカシェーヴィチ『数理論理学原論』（文化書房博文社）1992（原著：J. Lukasiewicz, Elementy logiki matematycznej, 1929 ）

[G]　G.Gentzen, The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, 1969（ゲンツェンの論文集の英訳）

[L－L]　C.I.Lewis-C.H.Langford, Symbolic Logic, 1932

[H－A]　ヒルベルト＝アッケルマン『記号論理学の基礎』（大阪教育図書）1974

（原著：D.Hilbert-W.Ackermann, Grundzuge der theoritische Logik, 6 Auflage)

［Ｒｅ］　ライヘンバッハ『記号論理学の原理』（大修館書店）1982　（原著：H. Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, 1947)

［Ｈ－Ｃ］　ヒューズ＝クレスウエル『様相論理入門』（恒星社厚生閣）1981　（原著：G.E.Hughes-M.J. Cresswell, An Introduction to Modal Logic,1968)

［Ｃ］　A.Church, Introduction to Mathematical Logic, Vol.1, Princeton, 1956

［Ｓ］　坂原茂『日常言語の推論』（東京大学出版会）1985

<u>文献解説</u>

［Ｋ－Ｋ］　論理学史研究の必携書。フィロンとディオドロスの仮言命題に関する論争を詳述。consequentiaについても詳しい記述がある。

［Ｐ］　フィロン派とディオドロス派に関する考察。

［Ｆ］　Beitrage zur Philosophie des deutschen Idealisumus I(1918-19) の仮言命題に関する考察を含む部分がLogical Invesigations という題名の元に英訳されている。¬¬p ⊃p も当然とは見なしていない。

［Ｒｕ］　material implication(p⊃q)をprimitive symbolとして、logic の体系が構成されている。Ch.3 Implication and Formal implication が重要。Frege発掘の書としても有名。

［Ｗ－Ｈ］　記号論理学の聖典。ここから現代の厳密な論理学が始まった。Lewis の様相論理もこの書のmaterial implicationに対する不満から生まれたという。

［Ｌｕ］　推論規則と命題との明確な区別はウカシェーヴィチによって初めて認識された。真理表も３値論理を対象として使われている。

［Ｇ］　特に、The consistency of elementary number theory では、ユークリッドの素数定理の証明を厳密に分析して、問題のある推論、ない推論とは何かを論じている。含意、否定が網状になると矛盾を起こす可能性があるとして、無矛盾性の必要性を説明。

［Ｌ－Ｌ］　現代様相論理の原典。VIII. Implication and Deducibilityの考察が重要。

［Ｈ－Ａ］　アッケルマンによる厳格含意（strenge Implication)の研究が紹介されている。

［Ｒｅ］　法則的含意と外延的含意の区別を与え、自然言語を法則的含意の概念で分析

する。構文論、意味論、語用論の解説も明快。

[Ｈ－Ｃ]　様相論理学の解説書。特に、付録２「帰結と厳密含意」は重要。例えば、ｐ．￢ｐ⊃ｑが認められないような論理体系はありえないことを指摘。

[Ｃ]　文献を捜すときに必要。同著者のA Bibliography of Symbolic Logic, J.Symbolic Logic(1936)も重要。

[Ｓ]　自然言語、とくに条件文の語用論的分析。論理学の知識を使って、条件文を理解するというふれこみ。これは情報科学、言語学、認知科学の研究領域。