ガリレオの連続量概念について

津田塾大学数学計算機科学研究所
中根美知代

1．はじめに

ガリレオの力学研究と数学を語るとき，必ず引用される有名なことばがある．

> 哲学は，眼の前にたえず開かれているこの最も巨大な書［すなわち，宇宙］のなかに，書かれているのです．しかし，まずその言語を理解し，そこに書かれている文字を解読することを学ばないかぎり，理解できません．その書は数学の言語で書かれており，その文字は３角形，円その他の幾何学図形であって，これらの手段がなければ，人間の力では，そのことばを理解できないのです*1．

実際にガリレオの著作にあたり，幾何学的な方法を活用して力学が展開されている様子を見れば，彼の研究方針がこのことばで端的に表わされていることは，素直に認めることができるだろう．確かにガリレオは，力学現象を記述し分析する技術として数学を用いていた．しかし，近年では，彼の力学研究と数学との関係を別の面から捉えようとする研究もなされている．

スティルマン・ドレイクは残されたガリレオの手稿をかかれた年代を推定して整理し，ガリレオの力学が形成される過程を再現することを試み，最近のガリレオ研究を方向づけてきた科学史家である．彼の研究の集大成『ガリレオの生涯*2』においては，ガリレオが新しい力学を構成する過程で，連続量とはなにか，ある運動学的量を表す面積が有限確定な値を持つか，無理量の解析をどのように扱うかといった，いわゆる，数学の厳密性に関する問題にまで考察を深めていくことが指摘されている．

とりわけ，ドレイクはガリレオの用いた比例論が運動の分析と結びつき，中世における運動の理解を乗り越える重要な手段となっているのみならず，それが連続性の認識の深化とつながっていく過程を重視している．中世ではユークリッド『原論第５巻』の比の相当性の定義*3が，有理数にしか適用できないように誤解されて伝えられた*4．これに対して，ガリレオは正しい理解の基づいた，有理数にも無理数にも適用できる比例論を身につけていた*5．自然加速運動における速度の変化を，中世は離散的なものと捉えてきたが，ガリレオは連続的なものとして考察を進めている．ドレイクは，ガリレオが速度の連続的変化を扱える数学的方法を身につけていたからこそ，自然加速運動をこのように分析できたとしたのであった．

『新科学対話*6』で，ガリレオは比例論を活用して，力学の諸命題を示していく．この本の読者に正しい比例論を理解させる必要があると考えた彼は，「第５日」で比例論を扱うことを決心し，死の床でこれに取り組くんだ*7．それは，ユ

ークリッドの定義にかえて，新たな定義を導入することにより，無理数を含む場合の比例の概念を直観的によりわかりやすくしようとするものであった．ドレイクはこれを捉えて，ガリレオの比例論を連続量の厳密な解析における大きな前進と評価し，『ガリレオの生涯』を締めくくっている．

力学の法則を発見し，それを数学で記述し，最終的にはその言語である数学自体を厳密に構成するための考察を進めていくといった手続きは，17 世紀から 19 世紀終わりまでの数学の発展方向を予言するようで興味深い．ただし，ドレイクの展開には理解しがたい点がある．それは，ガリレオの全実数に適用できる比例論の適用と実数の連続性の理解は等価であることを前提として議論を進め，速度の連続的変化と結びつけていることである．実数が有理数と無理数からなる連続体をなしているとの今日の理解に基づけば，この構成は自然に理解できる．しかし，はじめて実数の連続性を明確にしたとされているデーデキント[*8]より，250 年近く以前のガリレオの仕事をこのような前提のもとで評価してよいのだろうか．数直線の連続性は直観的に明らかであるが，そのことと，実数の連続性を厳密に捉えることの間に大きなギャップがあることを，デーデキントのパンフレットは示している．

この報告の目的は，ガリレオが実数の連続性の認識がどのようなものであったかを明らかにすることである．ガリレオは速度の大きさも，時間間隔も線分で表していた．それは，それらの量も直線も連続量であるとの前提のもとでなされた措置であったと考えられる．デーデキントは，まず連続直線の性質を明らかにし，これを数直線に対応させることにより，実数の連続性を証明した．おそらく，ガリレオにおいても，彼の連続量理解と時間，実数の連続性の理解は対応しているであろう．そこで，ガリレオは連続量の性質をどのような捉えていたか見てみよう．

2．ガリレオの連続性の理解

ガリレオが剛体や流体の運動を考えることから，自然に連続体の考察に導かれていったことは，『ガリレオの生涯』にも述べられている．1613 年とされるこの考察から，1620 年代のカヴァリエリ，グェヴィラとの不可分者に関する手紙の交換，『天文対話』への反論を述べたロッコとの 1834 年のやりとりに至るまで，20 年近くの歳月をかけ，ガリレオは連続量についての考察を深めていった[*9]．

ガリレオは，1837 年に出版した『新科学対話』で，自らの連続量概念をつぎのようにサルヴィアーチに語らせた．

> 「すべての連続量は，それ自身無限に可分な部分に分けることができるから，これらは無数の不可分量からなっているといわざるを得ない．なぜならば無限におこなうことのできる分割は，連続量を構成する部分が無数であるということを前提としてはじめて可能だからである．仮に各部分の数が無限であるとすると各部分の大きさは有限の大きさではない．なぜならば有限量を無数に集め

ると無限大となってしまうからである．そういう訳で無限の不可分量から有限の連続量が作られる．」

このようにガリレオは，連続的な大きさが可分な部分からできているか，不可分な部分からできているかを明確にする方向でこれを把握しようとしている．ガリレオはアリストテレスの『自然学』で述べられている「連続的なものは無限に可分割である」との性質を前提とし，これと連続なものが不可分量からできていることとは同じことであるとの理解から，上のような連続量概念に達したのであった[*10]．

連続体の構成要素が何であるかという点では，ガリレオの理解は誤ったものではない．しかし，これを明らかにすることが連続性を正確に把握したことにはなっていないことを，『新科学対話』のガリレオ自身の記述に基づいて示してみよう．以下は，ガリレオが連続量の性質を提示する少し前にかかれているものである．

図１

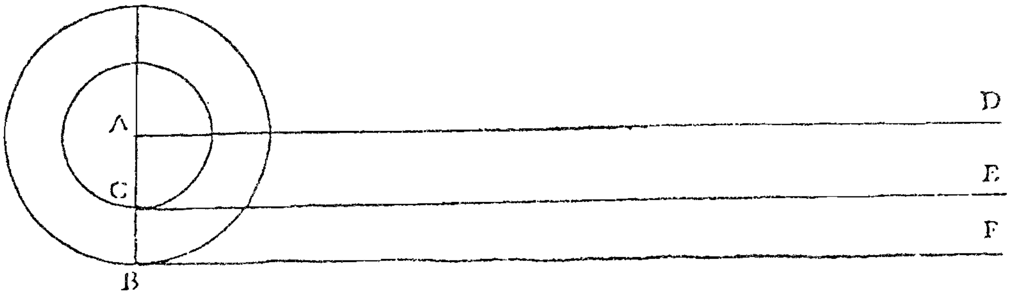
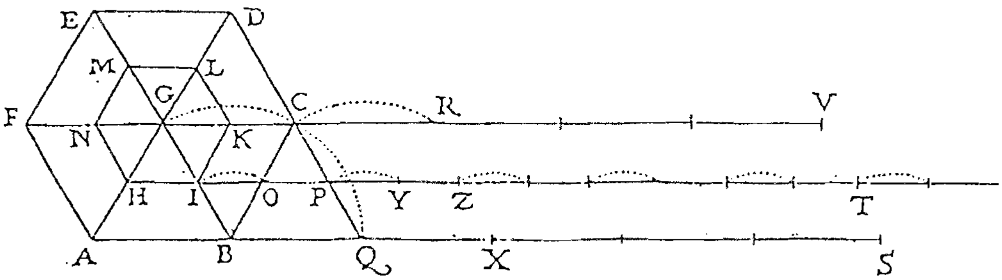


図２



サルヴィアーチは，図１のような運動をともにする２つの円を示した．そして，外側の円を直線ＢＦに沿ってころがし，点Ｂが点Ｆに達したときに，点Ｃが点Ｆに達することを述べた．半径のちがう円をころがしているにも関わらず，ＢＦとＣＥの長さが等しいという指摘に対して，彼はつぎのように説明した．図２のように運動をともにする２つの正６角形ＡＢＣＤＥＦ，ＨＩＫＬＭＮを考え，直線

ＡＳに沿って正６角形ＡＢＣＤＥＦをころがす．ＣがＱに重なったとき，ＩＫはＯＰに重なるが，この間にＩＯは正６角形ＨＩＫＬＭＮに触れることはない．これから，正６角形ＡＢＣＤＥＦが一回転したときの軌跡は直線ＡＳを埋め尽くすが，ＨＩＫＬＭＮのそれは直線ＨＴ上のある部分を埋めるにすぎないことがわかる．正６角形ＨＩＫＬＭＮにおいては，ＡＢＣＤＥＦが一回転するあいだに，６つの線分と５つの隙間を作るが，外側の多角形が一回転する間に，内側の多角形が作る線分と隙間の数は，多角形の角数を増やすとともに大きくなっていく．これを無限にしたものが円である．このことから，図１における直線ＢＣは連続的な直線だが，直線ＣＥは無限個の点と無限個の隙間からなっていると理解すべきであるのが，サルヴィアーチによって述べられたガリレオの考え方であった[*11]．今日では，直線ＢＦは連続，直線ＣＥは稠密ということばが当てられるであろう．

ガリレオが連続量と稠密量を発見し，区別しているのであれば，２つの概念のちがいが明確になるように連続量の性質を規定しなければ，それを正確に捉えたとはいえないだろう．ところが連続量の構成要素が不可分であるという性質は，連続量のみならず，稠密な量についても成り立つのである．

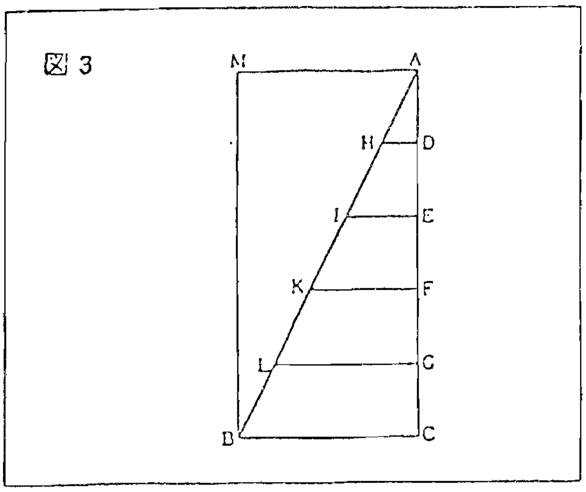
ガリレオは，その後稠密な量にはいっさい触れず，連続量のみを問題にして議論を展開し，前に述べた連続量の性質の理解に達したのであった．その過程で両者を対比させて，連続量独自の性質を見いだすという試みは『新科学対話』には見られない．

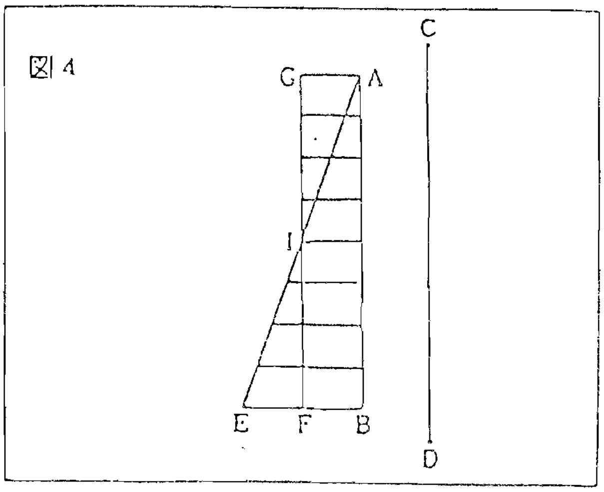
以上のことから，ガリレオは稠密量と連続量のちがいを直観的に捉えていたが，その段階にとどまっており，これからより精密な連続量概念を導くことができなかったといえるだろう．

３．連続量概念と運動学との関係

ここで，ガリレオの連続量概念と時間の連続性の理解は直ちに結びつくのだろうかという疑問が生じる．時間軸に隙間があるとすれば，速さの連続的な変化を考えられるはずがないと思えるからである．そしてこれから，正しい連続の概念に達し，これと稠密とを区別するようになったとも想像できるからである．ガリレオが速さの連続的変化を認識していくとき，その定義域である時間はどう考えられていたのだろうか．

ドレイクにしたがえば，1605 年と推定される folio 179-1 においては，ガリレオは「物理的瞬間」を表す無数の線分を有限の線分上に仮定し，中世的な速度変化の概念を持っていたが，1607 年と推定される folio 179 を書いたころには，これを連続的な変化として取り扱おうと決断とされている．この過程でガリレオは，時間の変化をだんだん細かく取っていき，速さの連続的変化を捉えたのであった[*12]．





このことは以下のように表現されている．ガリレオは『天文対話*[13]』において図3のような三角形を描き，ＡＣで時間を，ＡＣ上の点からＢＣに平行に引いた線分でその時刻における速度を表した．そして「時間ＡＤに速さの度合いＤＨが獲得されるのに先立って，線分ＤＡ上にある無限の点に対応した，時間ＤＡ上にある無限の瞬間に得られる無限に小さな度合いが通過される」と述べた．『新科学対話』においても「どんな小さな時間においても無数の瞬間が存在し，無数にある減少する速さの度合いに対応する瞬間が存在する」ことを主張するのみであった．これらの性質は，時間が連続的であっても稠密であっても成り立つものである．

ドレイクが物理学における数学的厳密性を多年にわたって考察した結果と評価した「第３日」自然加速運動について，定理１命題１についても同様である．これは「可動体が静止からの一様加速運動によってある距離を通過する時間は，同じ可動体が同一の距離をその最終の速さの半分であるような一様運動で通過する時間に等しい」というものであった．ガリレオは『新科学対話』に先立ち『天文対話』で，この命題の説明を与えている．ガリレオは図３を提示し，三角形ＡＢＣの面積が運動距離を表すとし，これが四角形ＡＣＢＭの面積の半分になることによりこの命題を証明している．一方『新科学対話』では，図４を描き，三角形ＩＥＦとＩＡＧに含まれる，ＥＦに平行な線がそれぞれ対応することからこの命題を証明している．『天文対話』の証明においては，無数の直線の和が有限な値である三角形の面積になるという曖昧な仮定が必要であったが，『新科学対話』では線分間の対応を考えるため，この仮定を避けることができる．ドレイクはこれを指して，先のような評価をしたのであった．

ところが，線分ＦＩとＧＩが連続量であろうと稠密量であろうと，三角形ＩＥＦとＩＡＧに含まれる線分に対して，１対１対応をつけることができるのである．勿論一方が連続量で，他方が稠密量であるような仮定をおけば，ガリレオは両者

の差異に気づくことができたかも知れない．しかし，ＦＩ，ＧＩはいずれも時間を表しているのであるから，ガリレオはそうした仮定をおくことはなかったであろう．両者の差はみのがされたまま議論が進められていったのである．

ガリレオは時間が連続的であることを繰り返し述べている．しかしそのことをより分析的に述べようとすると，一般の連続量の場合と同様に連続・稠密の区別のない概念を持ち出してきて論ずるにとどまっている．

しかし，ガリレオが時間や距離を直線であらわし，幾何学を用いて運動を扱っている限り，幾何学的な直観が彼の理解を助けたため，連続量に関する理解が曖昧なままでも，彼の研究に支障をきたすことはなかった．運動の問題をより代数・解析的に分析するような数学的枠組みがないかぎり，連続性と稠密性とを区別して扱うようにはなり得なかったのである．

4．ガリレオの比例論の限界と先見性

ガリレオの連続量理解がこれまでにみたような水準にあるならば，実数の連続性の理解もこれに対応すると考えられるだろう．より具体的にいえば，ガリレオは実数が有理数と無理数から構成されていること，これが数直線で表されることは理解していたが，数直線が今日の意味で稠密か連続かは明確に理解していなかった．すなわち，実数が連続な量をなすか稠密な量をなすか，厳密には捉えていなかったと考えられるのである．ドレイクが前提としている，ガリレオの実数の連続性の理解は，このようなものであった．

そこで，ギリシアの，実数の連続性を問うことなく，数は有理数と無理数からなっているとの認識から，デーデキントの，無理数が有理数からなる点列の隙間を埋め，実数連続体を構成するとの認識にガリレオが位置するとの理解のうえで，彼の比例論を評価しなおすことが必要であろう．

ガリレオは以下のような手順で，新たな比の相当性の定義を導入している．まず，欄外に通約可能量間の比の定義と注をつけ，サルヴィアーチに

> 同じ比を持つとは，第１の量が第２に等しく，第３も第４も等しいか，だい１が第２の自然数倍で，第３も第４の同じ自然数倍となるとき

と述べさせている．さらにシンプリチィオに，自然数のかわりに３＋（1/2），１＋（m/n），１＋（1/n）（m,n は自然数）としてもこの定義が成り立つことを述べさせている．

つぎに，ガリレオは欄外に通約可能量に対しても通約不能量に対しても成り立つ一般的定義と注をつけ，

> 第１の量（なんであれ）が，第２を超過しているのと同じだけ，第３が第４を超過しているとき，４つの量は比例していると解する．*14

としたのであった．ガリレオは自然数に代えて無理数をおいてみることにいっさい言及せず，直ちに議論を無理数の場合にまで飛躍させてしまったのであった．問題となる（無理数）／（無理数）の扱いについて，彼は何も述べなかった．こ

のことから，ガリレオの比の相当性の定義を

（A，B）＝（C，D）とは，A＝（m/n）BかつC＝（m/n）D

とした高橋[*15]の評価は適切なものであるといえるであろう．ガリレオはこの定義を出発点としてユークリッド原論第５巻の比の相当性の定義を証明し，一応の形式は整えたが，基礎となる定義が曖昧であるから，この比例論は当初の目的を達したとはいい難い．

しかし，ここには，厳密に証明されていないとはいえ，それ以降の実数の性質の研究を示唆する重要なアイデアが提示されていた．

ガリレオは自然数を有理数とした考察が終わったのち，これを無理数として議論を展開したはずである．しかし，それを十分展開しなかったのは，議論の途中で（無理数）／（無理数）を扱わざるを得ず，その値がこれまで知られていた有理数もしくは無理数となることを厳密に証明できなかったからではないだろうか．それにもかかわらず，このことを直観的には認めていたからこそ，彼はこのような定義をやや強硬に置いてしまったのであろう．

『原論』では自然数ｍ，ｎの値を変化させることにより，（無理数）／（無理数）を有理数で上下から押さえて，評価してきた．その値自身がどのようなものであるかについては言及していない．これに対してガリレオは，それに対応する値が実数のなかに存在すること，すなわち『原論』のはさみうちが一つの実数を定めることを暗示したのである．勿論これは厳密性という点では不十分な議論であった．しかし，デーデキントの水準での実数の連続性の性質のひとつがここで提示されているのである．この意味でガリレオの比例論は，実数の連続性の理解の歴史のなかでは，重要な位置を占めるといえるだろう．厳密性を重んじるあまり，（無理数）／（無理数）の議論を迂回する方向を採っていたとすれば，このような展開はありえなかった．

５．おわりに

以上，ドレイクの記述を批判的に検討することにより，ガリレオの連続性の理解がどのようであったかを検討してきた．その結果，ガリレオにおいては，稠密性と連続性が区別されておらず，したがって，今日的な実数の連続性の理解には達していなかったことが明らかになった．このことから，ガリレオが『原論』の比の相当性の定義を用いたのは，距離や速さの値が無理数になることを念頭においているためと判断した方が，それらのとる値が連続かどうかを問題にしているというより正確であるということができるだろう．

ドレイクが指摘したように，ガリレオは新たな力学体系を提示するのみならず，それを数学的に厳密な基礎の上に構成する方向を目指してきた．ただし，それらは今日の目からみれば，そこで扱われている現象に十分に対応した厳密性を持つものとはいい難かった．

ガリレオの段階を克服するには，新しい力学の現象の発見というよりも，これ

を記述する数学的手法・概念の進歩が必要であった．いいかえればガリレオは，それ以降の数学研究への豊かな課題を残してきたのである．ガリレオの力学研究を受け継いだ研究者が，今後どのような方法でこの課題を克服していったかについては別の機会に検討してみたい．

文献と注

*[1]山田慶児・谷泰訳『偽金鑑識官』（世界の名著 21 『ガリレオ』，中央公論社 1974 年） p.308.

*[2]S.Drake, Galileo at Work, University of Chicago,1978. 田中一郎訳『ガリレオの生涯』1・2・3,(共立出版 1985 年).

*[3]ＡｉとＡｋの比を（Ａｉ，Ａｋ）であらわすことにする．ユークリッド原論では（Ａ，Ｂ）＝（Ｃ，Ｄ）となるのは，任意の自然数ｍ，ｎに対して，

ｍＡ＞ｎＢならばｍＣ＞ｎＤ

ｍＡ＝ｎＢならばｍＣ＝ｎＤ

ｍＡ＜ｎＢならばｍＣ＜ｎＤ

が成り立つときに限ると定義されている．これは，実数の連続性を前提としなくても成り立つ性質である．したがって，ガリレオがこの比例論を用いていたことは実数の連続性を認めていたことの根拠にはならない．なお，この定義はプラトンの弟子エウドクソスが提唱したのものとされている．

*[4]当時，もっとも権威があるとされ広く中世に影響をおよぼした，法王ウルバヌスⅣ世つき司祭ヨハネス・カンパヌスのデキストがこの定義を誤って理解していたためである．カンパヌスは，比例の相当性の定義を

（Ａ，Ｂ）＝（Ｃ，Ｄ）とは（ｍＡ，ｎＢ）＝（ｍＣ，ｎＤ）

と解釈していた．これにしたがえば，定義はトートロジーであるのみならず，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄのいずれかが無理数の場合，比の相当性は定義できないことになる．カンパヌス自身もそのことに気づいており，無理比を扱うことの困難さを指摘していたし，この影響を受けたブラドワディーンらが，いかにして無理比を扱うかを盛んに研究していたのであった．

*[5]16 世紀半ばのイタリアにおいては，タルタリアによる，比の相当性の定義を正しく解釈した注釈が出版された．ガリレオ自身は，このテキストで学んだため，ユークリッドの比例論を活用することができたとされている．

*[6]今野武雄・日田節次訳『新科学対話上・下』（岩波文庫 1937 年，1948 年），なお，本論文作成にあたっては，伊東俊太郎『ガリレオ』（人類の知的遺産 31 講談社 1985 年）に収録されている翻訳も参照した．

*[7]Galileo,Opere,Ⅷ, pp.349-362.なお本論文作成においては，『ガリレオの生涯』pp.538-555 に収録されている日本語訳を用い，必要に応じて原典を参照した．

*[8]R.Dedekind, Stetigkeit und irrational Zahlen,(1872).本論文の作成にあた

っては，河野伊三郎訳『連続性と無理数』，岩波文庫（1961)を参照した．
*9『ガリレオの生涯』 pp. 271-277, pp. 356-361, pp. 389-396, pp. 435-454, pp. 457-464.
*10このことは，ロッコへの批判のなかで述べられている．
*11今日的な極限の概念からすると，多角形の極限は円であるから，この記述は不可解である．ガリレオの極限概念が，相当曖昧なものであることは，彼の著作のいくつかの箇所からうかがわれるが，このことについては別の機会に論じたい．
*12『ガリレオの生涯』，pp. 144-152, pp. 160-172.
*13青木靖三訳『天文対話上』，（岩波文庫 1988 年）
*14研究集会において，「超過している」という表現は，実数の切断を意味しているのではないかとの指摘があった．このことについては，機会を改めて検討したい．
*16高橋憲一「ガリレオの位置運動形成の一断面」『歴史学・地理学年報』（九州大学）第10号，1986 年，pp. 79-97.