Volterra－Hadamard－Fréchet－Lévy

－古典関数解析がホワイトノイズ解析に与えたインパクト－

飛 田 武 幸

名城大学　理工学部　数学教室

まえがき。

前世紀の終頃から今世紀の初頭にかけて、V. Volterra, J. Hadamard, R.M. Fréchet, P. Lévy 等を中心として、ヨーロッパにおいて展開された関数解析の成果は、一見地道な貢献のように思われるかもしれないが、現在はいろいろな立場から、その真価が再発見されている。この古典関数解析を、無限次元解析、特にホワイトノイズ解析の立場から、振り返ってみることが我々の目標である。本稿では、その中でも特に調和解析の視点を強調しながら、現在の我々がそこに、近代解析とどのような関連を再発見し得るのか、またどの様な新たな問題提起を見いだしうるかを考えてみたい。

話を具体化するために、古典関数解析を論ずるときは、ヒルベルト空間 $H = L^2[0,1]$、あるいは $L^2[S^1]$ 上で定義された汎関数（もちろん非線形汎関数）に限定して、その取り扱いを考えたい。すなわち、汎関数

$$\phi(x), \quad x \in H,$$

の微分・積分が我々の目標である。

先ず、変数 $x \in H$ を取り上げる。それは

(0.1) $$x(t) = x_t, \quad t \in [0,1],$$

と見なされて、見かけ上は連続無限次元のベクトルである。実際、応用上では、そのように考えることが必要となる場合が多い。そこでは、各 x_t が一つの変数となる。だから

(0.2) $$\phi(x) = \phi(x_t, t \in [0,1])$$

と書くほうが本旨に添うことになろう。

次に、微分であるが、Gâteaux 微分や Fréchet 微分、等 H やその部分空間の

位相を丁寧に考慮していけば、上のような変数のとりかたに見あった定義が可能である。汎関数の積分、あるいは平均については、多くの問題提起がなされてきたし、これからも関連する問題は少なくないであろう。

1。ライトモチーフ。

(I)　まずは問題の積分である。また、被積分関数としてどのようなクラスの汎関数を考えるかも考えねばならない。Hの位相的ボレル集合族 B(H) をとれば、可測空間 (H,B(H)) を構成することに困難さはない。ところが、そこにはルベーグ式の測度を導入することはできない。しかし、いわゆる，la valeur moyenne の概念の導入、有限から無限への移行等、古典解析の英知はここにおいて発揮されるのである。その一つの現代化はホワイトノイズ解析に於て実現されるが、そのことは驚くにはあたらない。どちらも無限次元解析の本質を正確にとらえているからである。ここで急いで紹介しようとするのは、第一にこの事実に他ならない。

測度から始めよう。無限次元ベクトル空間 H の単位球

$$S = \{x \ ; \ |x| \leqq 1\}, \qquad |\ | \text{ は } H\text{-ノルム},$$

における測度を定めたいが、それに対しては球も球面も区別がないことは、よく知られた事実である。

$|x| = 1$ を近似して $\sum_i x_i^2 n^{-1} = 1$, あるいは $S^{n-1}(n^{1/2})$.

そこで回転不変な測度を考えるというならば、回転群 SO(n) を用いることになる。

ついで、n を無限に大きくするが、そのときできるだけ頑張って、有限次元の解析の類似をみようというのが hyper-finite な解析であり、それはよく知られたことである。しかし、それだけでは古典解析の歪小化に過ぎない。我々の目的は真に無限次元的なものを見いだすことである。

本題を説明する前に、付表を参照していただきたい。　次元の数を表す n を d に変えて，S^d あるいは SO(d) による調和解析はよく知られており、これを地階 B に置く。

つぎに、次元 d を無限にして、I (1階) の構築物が考えられる。これも、現在では周知の事実となっていることが多い。

(II)　さらに、2階、3階を築くアイデイアを我々がどの様にして得たか

を、ここで説明しなければならない。ここで、P.Lévy の言葉を引用したい。

"私はこの建物の一つの階を築いた。これを他の人たちで続けてほしい"

と（彼の自伝 1970 より）。何と謙虚さと自信に満ちた言葉ではないか。

さて、本論に入る前に、注意したい事は、1階の段階で自然にガウス測度が登場するということである。すなわち、半径 $d^{1/2}$ の d 次元球面上の一様な確率測度を 1 次元空間上に射影すれば、d が無限に大きくなると射影された測度は、標準ガウス分布となり、各座標軸方向に独立な、同じ確率分布が導入される。全体として、加算無限次元の標準ガウス分布が得られる。その台は無限次元空間 R^∞ の中の球面である。標語的に云えば $S^\infty(\sqrt{\infty})$ である。その上に作用するのは無限次元回転群（後述する）の一つの部分群 G_∞ である：

$$G_\infty = \varinjlim G_d \qquad G_d \cong SO(d).$$

こうして、形式的には、球面上の調和解析の無限次元類似が得られる。それが1階の内容である。

以下において、我々は上のように、群を用いて、2階や3階を、調和解析の立場から構築することを提案したい。これが第二の目標である。

2。ホワイトノイズ

ホワイトノイズは前節の la valeur moyenne を与える操作を積分で表す測度に相当する。もちろんそのような測度は H 上には存在せず、H を拡張した超関数の空間上に導入される真の測度である。それは前節の議論から推察されるように、当然ガウス型である。正確には次のように定義される。

核型空間Eをテスト関数の空間にとり、いわゆる Gel'fand triple を構成する。

$$E \subset H \subset E^*. \tag{2.1}$$

E上の正定値汎関数 $C(\xi) = \exp[-\|\xi\|^2/2]$ によって定まるE^* 上の測度をμとする：

$$C(\xi) = \int \exp[i\langle x, \xi\rangle]d\mu(x). \tag{2.2}$$

測度空間（E^*, μ）がホワイトノイズである。そして μ はホワイトノイズ測度と呼ばれる。

この μ による汎関数の積分が、実は la valeur moyenne の実現であることはいわゆる Gâteaux の公式を見れば了解できるところである。 その公式は次のよ

うにして与えられる（Lévy 1951 による）。 H上の汎関数 $\phi(x)$, $x \in H$, が

$$\phi(x) = \phi(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)), \quad t_i \text{ different},$$

と表されるとき、その平均値 は

(2.3) $$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \cdots \int \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \exp[-(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2)/2] dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

である。

3。回転群

ホワイトノイズ測度 μ は回転不変な確率測度である。それを主張するためには、先ず無限次元回転群を正確に定義しておかねばならない。そこで、我々は H. Yoshizawa (1969) の定義を採用する。

その前に、P. Lévy による Lévy 群の紹介をしなければならない。Hの完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ をとる。π を自然数全体Nの自己同型とし、条件

(3.1) $$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \#\{n \leqslant N;\ \pi(n) > N\} = 0\text{、}\quad \# \text{ は個数を表す、}$$

を満たすものとする。このとき

(3.2) $$g_\pi :\quad \xi = \sum_n a_n \xi_n \dashrightarrow g_\pi \xi = \sum_n a_n \xi_{\pi(n)}$$

が核型空間Eの自己同型を与えるような g_π の全体を Lévy 群という。

[註1] (3.1)の左辺を π の density とよぶことがある。

Lévy 群の各要素は座標の入れ替えを表すが、それらは無限個の座標を同時に入れ換えることを許容する。しかし、それは勝手ではなく (3.1) の程度の制限がつく。この制限は、ホワイトノイズ測度の言葉でいえば、変換 g_π により μ の台が動かされないということである。

また、一般に g_π は、average power を計算することにより、有限次元の回転では決して近似されないことがわかる。

[註2] Lévy 群は離散群である。これを連続群の中に埋め込んで扱うことがおおい。

さて、H.Yoshizawa による回転、くわしくは核型空間Eの回転は次のように定義される： E上の線型な変換 g が

1） Eの同型写像であり、

2） Hの直交変換である

とき、これをEの回転という。

あきらかに、Eの回転全体は群をなす。これをEの回転群と呼び O(E) であらわす。Eを特定しないときは、これをO_∞ と書き、単に無限次元回転群と呼ぶことが多い。

[註] この定義はHの座標系を用いていない。

いま、$\{\xi_n\}$ がHの完全正規直交系で各元がEの要素であるとする。初めの d 個の ξ_n から生成されるEの部分空間E_d は R^d と同型である。

(3.2) G_d = $\{g \in O(E): g$ のE_dへの制限が回転、E_dの直交補空間で恒等写像$\}$

とおけば、G_d は 回転群 SO(d) と同型な O(E) の部分群である。

座標ベクトルξ_n の個数を増やして $d \longrightarrow \infty$ とすれば、第1節(2)で述べたような極限 G_∞ を得る。

付表の地階Bは、SO(d) と S^d による調和解析として位置ずけることが出来る。1階IはHの単位球面とその上の一様な確率測度の実現として、直観的には球面 $S^\infty(\sqrt{\infty})$ 上の回転不変な測度として、そして厳密には ホワイトノイズ (E^*, μ) として準備された測度空間を用い、これに無限次元回転群の部分群であるG_∞ を付属させた調和解析と考えられる。(L^2) の直和分解、その各成分である部分空間でG_∞ の規約ユニタリ表現が得られること、また無限次元ラプラス作用素のG_∞ による決定等、有限次元の調和解析と同様にできて、しかも有限次元での事実の $d \longrightarrow \infty$ としたときの極限として達成される。

ここで注意したいのは、古典関数解析の研究者達は、この部分に対応する事柄には余り興味を示さなかったということである。

また、1階から発展して、いわゆる hyper finite な結果も重要であるが、今はこの方向には向かわないことにする。

ここで、回転群O(E)に戻り、ホワイトノイズ測度μの回転不変性を見よう。$g \varepsilon E$ に対して、E^* 上に働く線型作用素 g^*が次のようにして一意に定まる:

(3.3) $\langle g^* x, \xi \rangle = \langle x, g\xi \rangle, \quad x \varepsilon E, \quad \xi \varepsilon E$。

そこで、積 $g \cdot \mu$ が定義されるが、その積の特性汎関数は $C(g\xi)$ であり、それは $C(\xi)$ に一致する。 すなわち

(3.4) $g \cdot \mu = \mu$

である。こうして、ホワイトノイズ測度の回転不変性が示された。O(E)の、特にG_∞ のユニタリ表現を考えることができたのは、この性質による。

これらの結果から、付表の１階はごく自然に構築され、また無限次元解析の土台となっていることがわかる。もちろん、そこにはまだまだ多くのことが研究課題として残っている。それだけではなく、応用面でも開拓されるべき話題が多く見い出されるであろう。。

４。<u>超汎関数</u>。

いよいよ２階に移る。初めてホワイトノイズの超汎関数が導入された（1975）時のアイデアは極めて素朴なものであった。すなわち、ホワイトノイズ測度μはブラウン運動$\{B(t)\}$の時間微分$\{\dot{B}(t), t\in R\}$の確率分布と見なすことができる。

［註］このため$\{\dot{B}(t)\}$をホワイトノイズと云うことがある。

したがって、(0.1) の $x(t)$ は（μ について、殆どすべてが）$\dot{B}(t)$ の見本関数とみなされる。そして、(0.2)で与えられる汎関数$\phi(x)$の最も基本的なものは、変数 $x(t), t\in R$, の多項式である。例えば $x(t)^n$とか、それらの積、さらにはそれらの一次結合（dt による積分）等が重要である。こうして、超汎関数の概念が導入されるに至った。

そのとき用いた手段は、初め T-変換、ついで S-変換（Kubo-Takenakaによる）を用いる $\phi(x)$ の積分表現を構成することであった。上の例のような超汎関数をT-変換すると、古典関数解析で normal functional と呼ばれるＨ上の汎関数と同じ形になった。そのような表現を持つ超汎関数は、時間を表すパラメーター t が explicit に現れており、時間の推移を問題にする確率過程の理論やその応用には極めて好都合なものとなった。さらにすべての t について変数 $x(t)$ を平等に扱う立場から、古典関数解析で云うところのラプラシアン（我々はそれを Lévy Laplacian とよぶ）は我々にとって好都合なものであることがわかった。こうして、確率過程論のアイデアから出発したホワイトノイズの超汎関数の理論が古典関数解析に支えられて発展すると同時に、時間の進行を考慮した解析は力学や分子生物学に広い応用を持つこととなった。

展開された理論を調和解析の立場から見るとき、対象となる群は、依然としてＯ(Ｅ)の部分群ではあるが、しかし、G_∞の外での議論になっていることがわかる。まさに Lévy 群を必要とするのである。各 $x(t)$ を平等にという考えは、Ｈ

の完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ を用いるならば、各要素 ξ_n を平等に扱うこととなり、それは Lévy 群による不変性によって数学的に表現出来ることとなる。その他、関連する古典関数解析の結果をホワイトノイズの言葉で置き換えて、新しい主張やその発展を、調和解析という視点で系統的に展開することができた。

近代的な設定は次のようにできる。主として、Streit-Kuo-Potthoff および Kubo-Takenaka 等によるものである。

超汎関数の空間は、量子力学における第二量子化の方法で、有限次元のときの Schwarts 空間の無限次元版ともいうべきもの

(4.1) $$(S) \subset (L^2) \subset (S^*)$$

なる triple を考えると、まさに(S^*) が超汎関数の空間として我々が求めるものとなる。

いくつかの例をあげてみよう。

1) Normal functional. S-変換した形であらわす。

(4.2) $$\int\cdots\int F(u_1,u_2,\ldots,u_m)\xi(u_1)^i\xi(u_2)^k\ldots\xi(u_m)^l du^{i+k+\cdots+l}.$$

2) Gauss kernel

(4.3) $$\phi(x) = N\exp[c\int x(t)^2dt], \qquad c \neq -1/2$$

3) δ 関数

(4.4) $$\phi(x) = \delta(B(t) - a).$$

Lévy Laplacian Δ_Lは Lévy 群によって特徴ずけられ、次の式で与えられる:

(4.5) $$\Delta_L = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\Delta_N, \qquad \Delta_N \text{ は } N \text{ 次元ラプラシアン。}$$

Δ_L は (L^2)上では 0 になってしまうが、(S^*) 上では積極的な役割をはたす。しかし、古典関数解析で知られているように、それは derivation である。

5。Causal calculus.

古典関数解析と我々のホワイトノイズ解析との、もう一つの接点を述べたい。我々の超汎関数の変数系は $\{x(t)\}$ であるから、微分

(5.1) $$\partial_t = \partial/\partial x(t) \quad (\text{or} = \partial/\partial\dot{B}(t)),$$

を考える。これは S-変換で移して、Fréchet 微分により定義される。詳しく云えば、超汎関数$\phi(x)$ の S-変換を $U(\xi)$ とするとき、$\partial_t\phi(x)$ はその S-変換が $U(\xi)$ の Fréchet微分 $\delta U/\delta\xi(t) = U'(\xi,t)$ である超汎関数として定義さ

れる：

(5.3) $$S^{-1}(U'(\xi,t))(x) = \partial_t \phi(x).$$

ここで $U'(\xi,t)$ は $U(\xi)$ の変分に対する Volterra 形式

(5.3) $$\delta U = \int U'(\xi,t)\delta\xi(t)dt$$

によって定まるものである。

微分作用素 ∂_t の adjoint operator ∂_t^* は (S) と (S^*) を結ぶ bilinear form < , > によって定められる：

(5.4) $$\langle\partial_t\phi,\psi\rangle = \langle\phi,\partial_t^*\psi\rangle, \quad \phi\in(S),\ \psi\in(S^*).$$

これらの作用素は添数が時間を表す t であり、時間の進行を恒に考慮した、いわゆる causal calculus に適した作用素と云うことができる。これらにより、無限次元 Laplace-Beltrami 作用素 Δ_∞ は

(5.5) $$\Delta_\infty = \int \partial_t^*\partial_t\ dt$$

と表され、Lévy Laplacian は形式的に

(5.6) $$\Delta_L = \int(\partial_t)^2\ (dt)^2$$

とかくことが出来る。

なお、G_∞ は $\{x(t), t\in R\}$ を座標系としたときの回転をも規定していることは Volterra の公式を通じてわかり、その生成作用素 $\gamma_{t,s}$, $t,s \in R$, は

(5.6) $$\gamma_{t,s} = \partial_t^*\partial_s - \partial_s^*\partial_t$$

で与えられる。この作用素もまた Laplacian の決定をはじめとして、有限次元の場合と同様に、(S^*) 上の調和解析に重要な役割を果たす。

以上、時間を表す連続パラメーター t を強調して、いくつかの作用素を導入した。これらを用いての解析、すなわち causal calculus を遂行できて、多くの応用をも論ずることができる。

応用の典型的なものをあげれば

1) Feynman の経路積分、

2) 連続無限自由度の場合の Dirichlet 形式、量子場の構成、

3) 'ゆらぎ'を伴うある種の微生物の行動の記述、

等がある。

以上がホワイトノイズ解析の建物における２階を占めるストーリーである。そこでは、まだまだ開拓しなければならない事が多いし、また温故知新の教えに従

って、古典関数解析の中に対応物を捜し出す楽しみも残っている。しかしながら、私（達）は先を急がねばならない。

6。Whiskers.

建物の３階に登ろう。その指針を与えてくれるのはやはり回転群である。これまで扱った O(E) の部分群はどれも完全正規直交系 $\{\xi_n\}$ の助けによって定義された。我々が次に考えるのはEの元 $\xi(u)$ の変数 u を変形することによって引き起こされるξの変換でEの回転となるもの、即ち O(E) の元となるものである。時間のパラメーター u は R^d を動くとする。そのとき

(6.1) $g : \xi(u) \longrightarrow \xi(\psi(u))|\psi'(u)|^{1/2}$, ψ : R^d のdiffeo.

となるような $g \in O(E)$ をかんがえたい。しかし、これだけの条件では一般的過ぎて具体的な構造が見出されない。そこで、応用例に示唆されて、(6.1) のような g のなす１パラメーター部分群 $\{g_t\}$ を取り上げることにした：

(6.2) $g_t \longleftrightarrow \psi_t$, $\psi_t \psi_s = \psi_{t+s}$.

いくつかの興味ある１パラメーター部分群が見いだされているが、次のものは重要である：

1) shifts S_t^j : $\xi(u)$ ----> $\xi(u - te_j)$, e_j: j-th 座標ベクトル.
2) dilation τ_t : $\xi(u)$ ----> $\xi(e^t u)e^{td/2}$.
3) rotations of u : SO(d).
4) special conformal transformations : $\kappa_t^j = wS_t^j w$,

ただし w : 単位球面についてのreflection。

これらをすべて合わせたものは $\{d(d+3)/2 + 1\}$ 次元の O(E) の部分群で、それはまた $SO_0(d+1,1)$ に同型な Lie 群である。これを C(d) で表して conformal群と呼ぶことがある。

この例のように、(6.1) で与えられる g からなる群はG_∞とも Lévy 群とも異なった性格の部分群であり、それが働く場所としては、２階を越えて３階までを準備しなければならない。例えば、R^d の中を動く (d-1) 次元の多様体 C に依存して (S^*) 中を変動する確率場 X(C) = X(C,x) を考える。 C の微小な変化に応じた X(C) の変分 $\delta X(C)$ をホワイトノイズ解析の中で取り扱うのを目標としたい。

当面次のような仮定をおく。

(6.3)　　$X(C, g\,x) = X(g'C, x), \quad g \in C(d).$

ただし、g'は g から決まるパラメーター u の変換であり、g とは 1 対 1 に対応する。この仮定をみたす X(C) の例としては、C で囲まれた領域でのホワイトノイズ積分、さらにはその関数がある。 C の変形は $g \in C(d)$ からくるもののみとすれば（実際、それで十分な場合が多い）、

(6.4)　　$\delta X(C) = \Phi(X, C, \{\alpha_k\}, \{dt_k\})$

なる確率変分方程式が得られる。ただし,$\{\alpha_k\}$ は C(d) の Lie 環の基によって定まる無限小変換である。

また、C が適当なクラスを動くとし、$X(C) \in (S^*)$ の仮定の下で S 変換 U(C) = $U(C, \xi)$をとり、その変分が

(6.4)　　$\delta U = f(U, C, \delta n)$,　　　δn : C の法線方向への変化、

と表される場合、特に右辺が Volterra 形式で与えられているときの研究も進められている。そこでは、再び古典関数解析の活躍する場がみられ興味深い。またその応用も広く考えられており、特に朝永の超多時間理論における Schrödinger 方程式へのアプローチは興味深い。

[註] 本稿で触れる余裕はなかったが、関連深い分野として、Wiener 空間上の解析がある。その近代的アプローチは P.Malliavin によって始められ,我が国でも伊藤清教授をはじめ多くの研究者 (S.Watanabe, S.Kusuoka, I.Shigekawa, H. Sugita,...)によって重要な貢献がなされていることを特記したい。

[付表]

"J'ai bâti un étage de cet édifice; que d'autres continuent!"

- from Paul Lévy's autobiography, 1970.

- Infinite Dimensional Harmonic Analysis -

arising from O_∞

III. Ultra infinite dimensional case

$\{X(C)\}$ random field living in $(S)^*$ ---> $U(C) = U(C,\xi)$

Variation: Electromagnetic fields, Hadamard equation

Super many time theory $\{\Psi(C)\}$;

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\right) \frac{\delta}{\delta C_P}\Psi(C) = - H(P,C)\Psi(C), \qquad C \in \mathbf{C},$$

diffeomorphism $\psi \longrightarrow g$

whisker $\{\psi_t\} \longrightarrow \{g_t\}$, $g_s g_t = g_{s+t}$,

whiskers get innovation; conformal group C(d)

deform C to have stochastic variation.

II. Infinite dimensional case

$(S) \subset (L^2) \subset (S)^*$

Potthoff-Streit characterization of $(S)^*$

$H_n^- \subset (S)^*$, Hermite polynomials in $x(t)$'s

Lévy group $\mathcal{G} \longrightarrow$ Lévy Laplacian $\Delta_L = \int \partial_t^2 (dt)^2$

Laplacians Δ_G, Δ_V : Obata's characterization

Gauss kernel $N\exp[-\frac{1}{2c}\int_T x(t)^2 dt]$: eigenfunctional of Δ_L

Kuo's Fourier transform on $(S)^*$

Classical theory for $(L^2)^-$

I. <u>Hyper finite dimensional case</u>

$(L^2) = \bigoplus H_n$,   Extends to hyper functional

$\text{supp}(\mu) \simeq S^\infty(\sqrt{\infty})$

<u>Hyper finite group</u> $G_\infty \equiv \varinjlim_n G_n$, $G_n \simeq SO(n)$

unitary representation of G_∞ on H_n

Laplace-Beltrami operator $\Delta_\infty = \sum_n \{(\frac{\partial}{\partial\xi_n})^2 - \langle x, \xi_n \rangle \frac{\partial}{\partial\xi_n}\}$

$-\Delta_\infty = N$: number operator

H_n : eigenspace of Δ_∞, eigenvalue : $-n$

irreducible unitary representation of G_∞ on H_n

Fourier-Wiener transform

B. <u>Finite dimensional case</u>

$L^2(S^d) = \bigoplus H_n$, $S^d \simeq SO(d+1)/SO(d)$

hyper functions on S^d

<u>Group</u> $SO(d+1)$, Δ_d : spherical Laplacian

Unitary representation of rotation group

Fourier series

The analysis in each story (except Basement B) above corresponds to a subgroup of O_∞.

REFERENCES

[BOOKS]

Vito Volterra (1860 - 1940)

[V1] Leçons sur les fonctions de linges. Gauthier-Villars, 1913.

[V2] (with J. Pérès) Théorie générale des fonctionneles. Gauthier-Villars, 1936. Livre I, Généralités sur les fonctionelles.

[V3] (with B. Hostinský) Opérations infinitésimales linéaires. Gauthier-Villars, 1938.

[V4] Opere Matematiche di Vito Volterra, volume quinto. 1926-1940, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

[V5] Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover Edition, 1959

Jacques Hadamard (1865 - 1963)

[H1] Leçons sur le calcul des variations. Hermann et Fils, 1910.

[H2] The psychology of invention in the mathematical field. Princeton Univ. Press, 1945.

[H3] OEuvres de Jacques Hadamard, Tome II, CNRS 1968.

René Maurice Fréchet (1878 - 1973)

[F1] Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. t. 22 (1906), 1 - 74, ; Les emsembles abstracts et le calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 30 (1910), 1 - 26, Japanese transl. by Saito et al, 1987.

Paul Lévy (1886 - 1971)

[L1] Les équations intégro-differentielles définissant des fonctions de lignes, 1 - 120. Thèses. Docteur Sci. math. 1911.

[L2] Leçon d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1922.

[L3] Analyse fonctionnelle. Mémorial des Sciences Mathématiques, # 5, Gauthier-Villars, 1925.

[L4] Cours de méchanique. Gauthier-Villars, 1928.

[L5] Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Seconde éd. des [L2], Gauthier-Villars, 1951.

[L6] Analyse fonctionnelle. Fonctions de lignes et équations aux dérivées fonctionnelles. Gauthier-Villars, 1951.

[L7] Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ. of California Pub. in Statistics vol. 1, no.12. (1953), 331 - 390.

[L8] Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Albert Blanchard, 1970.

Other refernces

1. Selected papers on Quantum Electrodunamics, ed. J. Schwinger, 1958, Dover Publ.

2. R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. Interscience pub. 1950; Repr. Springer.1977.

3 S. Tomonaga et al, Quantum field theory.(in Japanese) Iwanami.

[PAPERS]

V.Volterra

[v.1] Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. Rend R.Accad dei Lincei. (I) vol.III (1887), 97 - 105; (II) 141 - 146; (III) 153 - 158. See "Opere Matematiche," vol.1, 294 - 314.

[v.2] Drei Vorlesungen ueber neuere Fortschritte der Mathematischen Physik. Archiv der Mathematik und Physik. III Reihe, Band XXII, Heft 2/3. (1914), 95 - 181.

J. Hadamard.

[h.1] Sur quelques questions de calcul des variations. Ann. École Norm. Sup. 24 (1907), 203 - 231.

[h.2] Le développement et le role scientifique du calcul fonctionnel. International Congress, Bologne, 1928.

P. Lévy.

[l.1] Sur la fonction de Green ordinaire et la fonction de Green d'ordre deux relatives au cylindre de révolution. Rendoconti del Circolo Matematico di Palermo, 34 (1912), 187 - 219.

[l.2] Sur la variation de la distribution de l'electricité sur un conducteur dont la surface se déforme. Bull. de la Societe Mathématique de France. 46 (1918), 35 - 68.

[l.3] La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 16 (1953), 1- 37.

[l.4] Jacques Hadamard, sa vie et son OEuvre calcul fonctionnel et questions diverses. La vie et l'Oeuvre de Jacques Hadamard. 1967, 1 - 34.

[l.5] Fonctions de lignes et équations aux dérivées fonctionnelles. 18e Congrès international d'histoire des Sciences. 1971, Moscow.

S.Tomonaga

[t.1] On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. Progress of Theoretical Physics. vol.1 no.2 (1946), 27 - 42.

P.A.M.Dirac

[d.1] Relativistic quantum mechaqnics. Proc. of the Royal Society of London, A. 136 (1932), 453 - 464. *cf.* many time formalism.

F.Dyson

[d.1] The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. Physical Review 75 (1949), 486 - 502.

[d.2] The S matrix in quantum electrodynamics. Physical Review 75 (1949), 1736 - 1755.

M.D.Donsker and J.L.Lions

[d-ℓ.1] Fréchet-Volterra variational equations, boundary value problems,and function space intergals. Acta Math.108(1962), 361-375.

T.Hida

[h.1] White noise analysis and Gaussian random fields. Proc. 24th. Karpacz Winter School on Theoretical Physics, Jan. 1988. World Sci. Pub. 277 - 289.

[h.2] Brownian motion and Lévy's functional analysis. Sūgaku Seminar in Japanese, 1988.

[h.3] Stochastic variational calculus. Proc. IFIP Conf. Charlotte, 1991. to appear.

Si Si

[s.1] Gaussian processes and conditional expectations. BiBoS Notes Nr.292/87. Universität Bielefeld, 1987.

[s.2] Variational calculus for Lévy's Brownian motion. Proc. Nagoya Conf. on Gaussian Random Fields, August 1990. World Sci. Pub.

[s.h.1] -with T. Hida, Stochastic variational calculus in white noise analysis. preprint.

A.Noda

[n.1] Lévy's Brownian motion and stochastic variational equation. Proc. of the Nagoya Conf. on Gaussian Random Fields, August 1990. World Sci. Pub.