アルティンの相互法則について

三宅　克哉（名古屋大　教養）

1．高木-アルティンの類体論は，特にガウス以降19世紀を通して創りあげられたドイツ数学が荘厳華麗に結晶させた「凍れる音楽」であり，枚挙にいとまのないほどの者たちがこれに本質的に寄与した．しかも最後の一石を置いたアルティンにいたるまでは，誰もその完成像を確と脳裏に描くことはできなかった．またアルティンにしても，そのように速やかに最後の一石を，しかも自分自身の手で据えることができるなど予期はしなかったろう．もっとも，この類体論のあるべき姿は，少なくともシュヴァレーがイデールによってそれを描きあげて初めて全貌を現わすことになるのだろうが…

ヒルベルトは，良く知られているように，彼の類体論の構想を与えて決定的な影響を与えたが，それでも，彼が求めていた数体の「相対アーベル拡大論」の基本的な骨格が高木-アルティンの類体論によって与えられるとは予想だにしていなかったろう．有名な彼の「23問題」には類体論は直接には現われない．関連するものとして第9問題と第12問題がある；前者は冪剰余の相互法則をできるだけ一般的な枠組みで与えることであり，後者は「クロネッカーの青春の夢」とその拡張を与えること，即ち「アーベル拡大の構成問題」であった．高木の類体論は「クロネッカーの青春の夢」に最終的な解答を与えた．しかし，ヘッケのヒルベルト・モデュラー関数の研究をはじめ保型関数，保型形式の理論のその後のめざましい発展にもかかわらず，第12問題の本来の趣旨に対しては，単純明快に述べられそうな形の結果はその後未だに得られていない．一方，第9問題に

関しては，高木の類体論と相まって，アルティンの相互法則が決定的な解答を与えた．この事実はこれらの二つの問題の間の本質的な差異を明らかにしている．しかし少なくとも19世紀に見るかぎり，これらに分離，抽出された事柄は深く影響しあって互いの発達を促してきた．今世紀に入る頃になると，ヒルベルト，フルトヴェングラーは相互法則に力点を置き，ヴェーバー，さらにフェェターはもっぱら「クロネッカーの青春の夢」に力点を置くようになった．それぞれが独自に著しい進展を与えたが，その結果，両者が手を携えればもう一歩で息を飲む一大スペクタクルを目にすることが出来ようとは思ってもいなかったろう．決定的な一歩を自ら踏み出した高木自身も初めは我が目が信じられなかったという．彼はそれを二大論文 [T1]，[T3] に見事に集約させた；先達が取り出し，積み上げてきた諸々に内在して潜む意匠を汲み取るべく，彼はそれらを明快に配置し，そこに壮大な構築物を見い出し，その枠組みを組み上げた．そしてアルティンがやってきた．その全容を啓示するために．（詳細は [M2] 参照．）

2．アルティンは彼の名を冠することになる「一般相互法則」を先ず1923年に発表し（出版は1924年，[A3]），４年後の1927年に証明に成功した（[A4]）．前者の題名は

Über eine neue Art von L-Reihen

である；これの主題は，いわゆるアルティンの L-関数の導入によってデデキントのゼータ関数の比に積表示を与えることであった．全集に見る限り，これが彼の三番目の論文である．

彼の最初の論文 [A1] は学位論文で，有限素体上の一変数有理関数体の２次拡大体の「数論」を体系的に展開しており，合同ゼータ関数を，その関数等式を含めて，初めて本格的に研究したものとしても良く知られている．（コルン

ブルム [Ko] は，有限素体上の一変数多項式環に対してディリクレの「算術数列定理」のアナロジーを示すために合同 L-関数を初めて導入している．）　二番目の論文 [A2] では，有限次代数体のガロア拡大 K/k に対するデデキントのゼータ関数の比 $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ が全複素平面上で正則であるかどうかを，ある種の非アーベル拡大について検証している．そして [A3] では，一般にこの比 $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ を自然な「L-関数」の積に分解するという問題が取り上げられ，ガロア群のフロベニウス [Fr2] による群指標を用いた L-関数が導入されるはこびとなった．特に K/k がアーベル拡大であるときには，高木の類体論によって，同じ $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ に別種の分解が与えられている；K/k に対応する合同イデアル類群の指標にもとづいたヴェーバーの L-関数による積表示である．これら二種の L-関数による分解は自然に一致しなければならない；アルティンは彼の一般相互法則によってこれを宣言する．（高木による [A4] の紹介 [T4] を付録としておいた；「一般相互法則」の数学的な記述についてもこれを参照のこと．）

これら [A1] と [A2] がそれぞれデデキントの [De1] と [De2] に直接動機付けられていることは既に昨年の当地でのシムポジウムで報告しておいた；またデデキント自身がディリクレの L-関数による手法を非アーベル的な方向に拡張することを強く意識し，フロベニウス [Fr2] の群指標の理論の創造に対して多大の影響を与えたことも良く知られている；（Hawkins [H1, 2] 及び [M1]，[M3] 参照）．若きアルティンが [A3] で [T1] に，また [A4] で [T1] と [T3] に言及している様子から見れば，彼がこの高木の二論文を踏み台にして，直ちに非アーベル的な世界へ飛び出そうとしたように思える．高木も [T2] を締めくくるに当たって，彼の類体論を非アーベル的に拡張することが重要であると強調している．（ただし高木は [T2] では，彼の Strahl を用いたイデアル類

群をさらに非アーベルな正規拡大を統制するようにまで改良する方向を示唆している．素朴に考えれば，これは，それ自体は自然なヒルベルトのイデアル類群を遥かに離れてしまって「技巧的」とも見えるヴェーバー-高木流のイデアル類群，特にStrahlの本質的な意味を探ることを問うているのであり，さらに例えば「同型定理」を当面は犠牲にして，むしろ「クロネッカー式密度」などに注目して解析的な方法によって進むことを示唆しているように思える．この「Strahlの本質的な意味」については，筆者はこれをシュヴァレー流のイデール化の骨格である「局所-大域関係」に見るのを正解と考える．)

3．1926年にアルティンにとっての思いがけない援軍が現われた．チェボタレフ[Ts]がフロベニウス[Fr1]が与えていた予想の証明に成功し，いわゆる「チェボタレフの密度定理」を得たのである．彼の証明はシュライアー[Sc]によって直ちに分析され，円分体を駆使して一般の代数的数体の解析にあてる方法が見事に抽出された．これを得たアルティンは，翌1927年にたった11ペイジの論文[A4]を書き上げ，「一般相互法則」を証明したばかりか，それによって一般の指数の冪剰余の相互法則をも示した．指数が素数の冪である場合にフルトヴェングラー[Fw1]が単純に数えて90ペイジ近くを，また高木[T3]が50ペイジを費やさざるを得なかったことからみても，このアルティンの論文が関係する人々に与えた衝撃の程が想像されるだろう．付録にあげた論文紹介記事を高木は，

「要するに代數的整數論に於ける近來の快著である．」

と締めくくった．これにいかなる感慨をこめたのだろうか．また高木は[T5]の第14章で次のように述べている：

「1927年にArtinが驚嘆すべき発見をなした．それはArtinの相互法則で，…．この相互法則によれば，上記同

型定理も分解定理も一度に証明されてしまう．」
（ここで興味深いのは，高木が「発見」という言葉を用いながら 1924 年の論文 [A3] には一切触れないで [A4] のみを取り上げていることである．彼にとっては数学的なものは証明されて初めて数学的な「事実」であって，「事実」ならざるものを書き出してみても，その時に証明が付けられていない以上，いつになってもそれは「発見」と呼ばれるものではないのかもしれない．）

因に，フロベニウス [Fr1] はクロネッカー [Kr] に触発されて行なわれた研究であり（[M1] 参照），いわゆるフロベニウス置換を用いて「チェボタレフの密度定理」を完全な形に定式化したものである．これによってハセは「フロベニウス置換」の呼称を用いることにしたのだが，フロベニウス置換そのものは既にガウス [G] 以来十分に知られ，利用されている．なお，高木の次のコメント（[T5]，p.261，脚注；第２版，p.244）も面白い：

「密度 $\Delta(\Omega)$ によって代数体 Ω/k を統制しようというのは Kronecker の夢想であった．Kronecker は Δ_a の存在を仮定したに過ぎなかったが，ここでも「ヤマ」が当たって，Δ_a の存在は Frobenius の部分的成功の後を継いで Tschebotareff に至って確定したのである．我々はこの予言者の名を冠して「クロネッケル」式密度の呼称を用いたのである．」（第２版による．）

4．アルティンは，彼の一般相互法則の証明を書き上げた 1927 年の夏には，その「単項化定理」の証明への応用についてフルトヴェングラーに報告している（[Fw2] 参照）；第２類体，即ち基礎の体のヒルベルトの類体のヒルベルトの類体，のガロア群を用いることにより，「単項化定理」がメタアーベル群についての一般的な命題に書き換えられる，というのである．そしてフルトヴェングラーは些かの骨折

りのあと (nach einiger Mühe ; [Fw2]) この群論の命題を証明し，遂にヒルベルトの「単項化予想」にも決着を付けた．これらの結果は [A5]， [Fw2] として 1930 年に同時に出版された．ここに，ガウスに始まり，例えばクムマー，クロネッカー，デデキントを経て，特にヒルベルトが具体的に書き出した「一般的な相互法則」をめぐる代数的数論，「相対アーベル体の理論」の構築，についての諸問題はすべて一応の決着を見た．

と同時に，イデアルのカピチュレイションの問題，類体塔の問題，さらには，ハセのノルム定理が引き起こす代数体の中心拡大，アルティンの L-関数についての予想，等々，非アーベル的な問題が浮かび上がった．これらのすべてについての十分に満足できる解答はまだまだ得られていない．

さて，シャファレヴィチ [Sh] が待ち望んでいる「冪零数学」は，いつ，どこで，どのようにその姿を現すのだろうか．

付　録
日本數學物理學會誌 1 (1927), pp. 221-223, より

一般の相互法則の證明 (E・アルチン)

[E. Artin: *Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes.* Abhand. a. d. Math. Sem. Hamburg. Universität, 5 (1927), 353-364.]

k を基礎のケルパー, K/k を k に對してのアーベル. ケルパー G を K/k のガロア群, $\mathfrak{p}$ を k の素イデヤールで K/k の判別式に含まれぬもの, $\mathfrak{P}$ を K に於ける $\mathfrak{p}$ の素因數とすれば群 G の置換の中に次の性質を有する σ が唯一つ存在する. その性質とは K の凡ての數 A に關して, 又 $\mathfrak{P}$ を法として

$$A^{(N\mathfrak{P})}\equiv\sigma(A) \qquad (*)$$

であることである. σ の冪から成る群 $\{\sigma\}$ は即ち $\mathfrak{P}$ の分解群である. K/k がアーベルケルパーであることから σ は $\mathfrak{P}$ と共軛なるイデアールに對しても同一で, 從て (*) は k の素イデアール $\mathfrak{p}$ を法としても成り立つ. さてアルチンが證明した一般の相互法則は次の通である,「k の素イデヤールに (*) に由て K/k のガロア群の置換 σ を配合し又 k に於けるクラスは K をクラーセンケルパー (Klassenkörper) とするやうに定めるならば, 同一のクラスの凡ての素イデヤールには同一の置換 σ が配合される. この配合は一對一で, k のクラスと K/k のガロア群との間の一つのイソモルフイズムを定義する即ちクラスの積には置換の積が對應する.」

アルチンは紹介者が組立てたクラーセンケルパーの理論 (東大理學部紀要, 41) を自由に應用することに由て上記の定理を迅速に―約 7 頁―で證明した, 上記の定理で個々の置換 σ の代に置換群 $\{\sigma\}$ を採ることにすればそれはクラーセンケルパーの理論で知れてゐる (上記引用中定理 31) のであるが, 群の代に個々の置換 σ を採り得ることが新事實である. この事實が畢竟何を意味するかは未だ明でないが, 驚くべきことは上記アルチンの定理から傳統的の相互法則が, 而も任意指數 m に關して, 思ひも寄らぬ簡單さで導き出し得る所に存する. アルチンの定理の證明を此處で詳細に述べることはできぬが, 唯 K が k に 1 の冪根 ζ を添加して得たケルパー (アルチンの所謂 relativer Kreiskörper) である特別の場合には定理は明白である. この特別の場合を巧に利用して一般の場合が證明されるのである. 基礎のケルパー k が 1 の m 乘根を含むものと假定するのが傳統的相互法則の立場であるが, その場合に $K=k(\sqrt[m]{\mu})$ として, $A=\sqrt[m]{\mu}$ に (*) を適用すると,

$\sigma=(\sqrt[m]{\mu}\to\zeta^{\nu}\sqrt[m]{\mu})$ のとき

$$\mu^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{m}}\equiv\zeta^{\nu}\pmod{\mathfrak{p}}$$

を得る. この ζ^{ν} が即ち記號 $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ の定義であるが, この傳統的の定義に附きまとうた任意的又は暫定的の分子がアルチンの定理に由て取り除かれたと見て差支ない. 要するに代數的整數論に於ける近來の快事である.　　(高木貞治抄錄)

文 献

[A0] E. Artin. The Collected Papers of Emil Artin, ed. by S. Lang and J. Tate, Addison-Wesley, 1965.

[A1] _____. Quadratische Körper der höheren Kongruenzen I, II, Math. Zeitschrift 19 (1924), 153-246 = Collected Papers, 1-94.

[A2] _____. Über die Zetafunctionen gewisser algebraischer Zahlkörper, Math. Ann. 8 (1923), 147-156 = Collected Papers, 95-104.

[A3] _____. Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), 89-108 = Collected Papers, 105-124.

[A4] _____. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 353-363 = Collected Papers, 131-141.

[A5] _____. Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitäsgesetz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1930), 46-51 = Collected Papers, 159-164.

[De1] _____. Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, Jour. reine angew. Math., Bd.54 (1857), 1-26 = Werke I, 40-66.

[De2] _____. Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern, Jour. reine angew. Math. Bd.121 (1900), 40-123 = Werke II, 148-233.

[Di1] P. G. Lejeune Dirichlet. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.18 (1838), 259-274 = Werke I, 357-374.

[Di2] _____. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinisimale á la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.19 (1839), 324-369, Bd. 21 (1840), 1-12 und 134-155 = Werke I, 411-196.

[Di3] _____. Recherches sur les formes quadratiques á coefficients et indetérminées complexes, Jour. reine angew. Math. Bd. 24 (1842), 291-371 = Werke I, 533 -618.

[F] G. Frei. Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory, in The History of Modern Mathematics, ed. by D.E.Rowe and J.McCleary, Academic Press, 1989.

[Fr1] G. Frobenius. Über Beziehungen zwischen Primzahlen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 689-703 = Ges. Abh. II, 719-733.

[Fr2] _____. Über Gruppencharactere, Sitzungsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin (1896), 985-1021 = Ges. Abh. III, 1-37.

[Fw1] Ph. Furtwängler. Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern I, Math. Ann. 67 (1909), 1-31; II, 72 (1912), 346-386; III, 74 (1913), 413-429.

[Fw2] _____. Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1930), 14-36.

[G] C.F.Gauss. Disquisitiones Generales de Congruentiis. Analysis Residuorum Caput Octavum. Gauss Werke II, Göttingen, 1863, 212-242.

[H1] Th. Hawkins. The origins of the theory of group characters, Arch. history exact sci. 7 (1970/71), 142- 170.

[H2] _____. New light on Frobenius' creation of the theory of group characters, Arch. history exact sci. 12 (1974), 217-243.

[Ko] H. Kornblum. Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression: [Aus dem Nachlaß herausgegeben von E.Landau.], Math. Zeitschrift Bd. 5 (1919), 100-111.

[Kr] L. Kronecker. Über die Irreductibilität von Gleichungen, Monatsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin (1880), 155-162 = Werke II, 83-93.

[Ku1] E. Kummer. Zur Theorie der complexen Zahlen, Monatber. kgl. preuss. Wiss. Berlin (1845), 87-96 = J. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 319-326 = Collected Papers I, 203-210.

[Ku2] _____. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complex Zahlen in ihre Primfactoren, Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 327-367 = Collected Papers I, 211-251.

[M1] K. Miyake. A note on the arithmetic background to Frobenius' theory of group characters, Expo. Math. 7 (1989), 347-358.

[M2] _____. The Establishment of the Takagi-Artin Class Field Theory, Preprint series 1990, No.12, Coll. Gen. Educ., Nagoya Univ. Submitted to Proceedings of The Tokyo History of Mathematics Symposium 1990.

[M3] _____. デデキントの数論について，津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 1 (1991), 22-31.

[Sc] O. Schreier. Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff, Abh.Math.Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 1-6.

[Sh] I.R. Shafarevich. Abelian and Nonabelian Mathematics, The Math. Intelligencer Vol.13, No.1, Winter 1991, 67-75.

[T0] T. Takagi. Collected Papers, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, 1970; The Second Enlarged Ed., Springer-Verlag, 1990.

[T1] _____. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Tokyo 41 (1920), 1-133 = Collected Papers, 73-167.

[T2] _____. Sur les corps résolubles algébriquement, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des Sciences, Paris, t.171 (1920), 1202 - 1205 = Collected Papers, 172-174.

[T3] _____. Ueber das Reciprocitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, J. Coll. Sci. Tokyo 44 (1920), 1-50 = Collected Papers, 179-216.

[T4] _____. 一般の相互法則の證明（Ｅ・アルチン），日本數學物理學會誌 1 (1927), 221-223.

[T5] _____. 代數的整數論，岩波書店，1948 ；第２版，1971.

[Ts] N. Tschebotareff. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann. 95 (1926), 191-228.