アーベル積分の等分と変換に関するヤコビとエルミートの理論

――――― ヤコビ関数論ノート(I) ―――――

高瀬　正仁（九大理）

［目　　次］

１．歴史的概観

アーベル積分論はアーベルの名高い「パリの論文」

［Ａ－１］「ある非常に広範な超越関数類のある一般的性質に関する論文」
（１９２６年。全集，Ｉ，ｐｐ．１４５－２１１）

に始まるが、この論文が書かれたのは、アーベルが長篇「楕円関数研究」（１８２７－２８年。全集，Ｉ，ｐｐ．２６３－３８８）を皮切りに、楕円関数に関する重要な諸論文を次々と発表していった時期（１８２７－２８年の二年間）よりも以前のことであった。この事実に端的に表象されているように、アーベル積分論は本来、楕円関数論と同一の思想圏内において究明されるべきテーマである。だが、１９世紀の数学史の流れの中では、楕円関数論の場合のように高い完成度を獲得するだけの十分な拡がりは見られず、多くの本質的な問いが手付かずの状態のままに放置されているように思われる。そこで本稿では１９世紀のアーベル積分論の形成史を概観し、数学史の立場から見て解明されるべき諸論点を取り出して列挙したいと思う。

アーベル積分論の主要な担い手は、アーベル自身を始めとしてヤコビ，エルミート，リーマン，ヴァイエルシュトラスの五人だが、さらに、やや副次的ではあるが重要な貢献者として、ゲーペルとローゼンハインを挙げたいと思う。また、別格として、孤高の神秘的貢献者ガロアの名も逸することはできない。アーベルは完全に一般的なアーベル積分を対象として加法定理を究明し、わけても「アーベルの定理」を発見した。ヤコビはアーベルを継承して「ヤコビの逆問題」を提出し、アーベル積分のある種の逆関数、すなわちヤコビ関数（詳しくは後述するが、これは私の命名である。）というものの存在を示唆したが、ゲーペルとローゼンハインは超楕円積分を対象とする場合ついて、これを解決した。リーマンとヴァイエルシュトラスは任意のアーベル積分に対してヤコビの逆問題を解決し、これによってヤコビ関数の存在が一般的に確定した。ヤコビはまた、楕円関数論の場合のように、（超楕円積分に限定されてはいたが）アーベル積分の等分と変

換の問題を考察し、若干の具体的結果を書き留めた。証明は欠如していたが、これはエルミートが継承して証明を与えた。そしてオーギュスト・シュヴァリエに宛てて書かれたガロアの有名な遺書の中の断片的な記述によれば、ガロアはあたかも上記の諸論点を包摂する高い立脚点を確保していたかのようである。

こうしてアーベル積分論史の究明において、考察されるべきテーマは下記の通りである。

アーベルの加法定理

ヤコビの逆問題

アーベル積分の等分と変換

本稿では主としてヤコビとエルミートによる等分と変換の理論に焦点をあてながら、全体像のスケッチを試みたいと思う。

最後に、もう一つの重要な論点に注意を喚起したいと思う。アーベル積分論の背後には、なお隠されている深遠な領域が存在する。それは数論である。実際、楕円関数論の場合に比して、上記の登場人物の中には、レムニスケート積分の理論に基づいて四次剰余相互法則を証明したアイゼンシュタインと、「クロネッカーの青春の夢」を提出したクロネッカーに相当する数学者が欠如しているのである。アーベル積分論と数論との関係のいかなるものかをめぐる問いの究明は、アーベル積分論というものの本質規定を根本的に左右するであろう。

２．用語法に関する注意

本論に入る前に、頻繁に用いられる基本用語について、正確な概念規定を行っておきたいと思う。今日の流儀では、楕円積分と楕円関数、それにアーベル積分とアーベル関数という用語には、それぞれ独自の意味が附されている。すなわちアーベル積分とは一般に代数関数の積分を意味する言葉であり、アーベル関数とはアーベル多様体上の解析関数のことにほかならない。楕円積分と楕円関数の用語上の区別もこれに準じている。しかしルジャンドル，アーベル，ヤコビ，エルミート，リーマン等々の時代には必ずしもそうではなく、幾分様相を異にする流儀の用語法が行われていた。実際、ルジャンドルは著作『楕円関数　概論』の中で、楕円積分そのものを指して、楕円関数または楕円的な「超越的なるもの」と呼んでいる（第一巻，ｐ．１４）。　また、周知のようにアーベルは論文「楕円関数研究」において第一種楕円積分の逆関数を考察したが、それに特別の名称を与えたわけではなく、高々、どこか別の所で「第一種逆関数」という便宜的な呼称を用いているにすぎない。ところがヤコビはルジャンドルが楕円関数と呼んでいるものを即物的にも楕円積分と呼び、アーベルの第一種逆関数に新たに楕円関数の名を与え、そのようにして両者を明確に区別することを提唱した　（１８２９年８月１９日付のヤコビのルジャンドル宛書簡参照。ヤコビ全集，Ｉ，ｐ．４５２）。こうして楕円関数という言葉の指し示すものは、あるときは楕円積分それ自体であり、またあるときは今日の語法の意味での楕円関数である。たとえば、上記のルジャンドルの著作『楕円関数　概論』やアーベルの論文「楕円関数研究」の標題に見られる「楕円関数」は楕円積分にほかならないが、ヤコビの著作『楕円関数論の新しい基礎』では、この書物の中で第一種楕円積分の逆関数を楕円関数と呼ぶことが明記されていることに鑑みて、標題の「楕円関数」もまた、今日のいわゆる楕円関数を指していると考えられるのである。

アーベル積分とアーベル関数についても事情は基本的に同様であり、後述する

エルミートの論文［Ｈ－１］，［Ｈ－２］の標題において「アーベル関数」、「超楕円関数」と呼ばれているものは、それぞれ今日の用語法でのアーベル積分、超楕円積分にほかならない。リーマンの論文「アーベル関数の理論」における「アーベル関数」もまたアーベル積分を指していると考えるのが至当である。だが、ヤコビの場合には特に注意深い考察が必要である。後述するヤコビの論文［Ｊ－１］，［Ｊ－２］の標題において、「アーベル積分」という訳語が当てられているものは、原語を直訳すると「アーベル的な超越的なるもの」となるが、これは正しく今日のアーベル積分そのものである。他方、論文［Ｊ－３］の標題に登場する「アーベル関数」は、ヤコビが「アーベル積分の解析に導入するのが適切であって、しかも三角関数と楕円関数に類似なもの」（全集，II，ｐ．８５）として認識した新しい関数を指し示している。すなわちヤコビは、楕円積分と楕円関数の場合にそうしたように、ここでもまた、アーベル積分とアーベル関数という二つの言葉をはっきりと区別して使用しているのである。ところがヤコビのアーベル関数は今日のアーベル関数、すなわちアーベル多様体上の解析関数、あるいは多重（２ｎ重）周期をもつ多変数（ｎ変数）の一価解析関数ではなく、アーベル多様体上のある種の代数的分岐被覆域上の解析関数、いわば多重（２ｎ重）周期をもつ多変数（ｎ変数）の有限多価（ｎ価）解析関数であり、ヤコビ以降、適切な名称を欠いたまま今日に至っている。そしてそのために、ここに多少の用語上の混乱が発生する余地が認められるのである。そこでわたしはヤコビの言うアーベル関数に対して、ここであらためてヤコビ関数という名を与えることにしたいと思う。楕円積分の場合には等分理論と変換理論の対象は等しく楕円関数だったが、後述するように、一般のアーベル積分の世界ではこれらの二つの理論の対象はそれぞれヤコビ関数、アーベル関数へと乖離していくであろう。それ故、これらの二種類の関数の用語上の区別は本質的に重要であると考えられるのである。

３．アーベルの加法定理

アーベル自身はアーベル積分論の領域において、「パリの論文」のほかになお、下記の二論文を公表している。

［Ａ－２］「ある種の超越関数の二、三の一般的性質に関する諸注意」
（１８２８年。全集，I，ｐｐ．４４４－４５６）
［Ａ－３］「ある超越関数類のある一般的性質の証明」
（１８２９年。全集，I，ｐｐ．５１５－５１７）

論文［Ａ－３］はアーベルが病に倒れる直前に書かれた、いわゆる「二頁の大論文」（高木貞治『近世数学史談』，ｐ．１３４）であり、その内容は「パリの論文」の主定理の簡潔な再現である。論文［Ａ－２］では「パリの論文」のテーマが超楕円積分を対象として繰り拡げられて、ひときわ精密な諸結果が導出されている。そうして紛失された「パリの論文」が世に現われたのはようやく１８４１年のことなのであるから、アーベル積分論におけるアーベルの思想は、その片鱗は論文［Ａ－３］に示されているとはいえ、実際にはこの論文［Ａ－２］の中に具体的に描写されていると考えられるのである。ヤコビもまたこの論文を通じて、アーベル積分論への糸口を見いだしたのであった。

アーベルによる加法定理の究明は二段階に分かたれている。「パリの論文」において、アーベルはまず初めに今日のいわゆる「アーベルの定理」を確立し（ただし、アーベルの立脚点は今日の立場とはちょうど正反対である。なぜそのような逆転現象が起こったのかという論点も、それはそれで数学史における興味深い問題である）この主定理に基づいて、リーマン面の種数に相当するものの自覚的認識へと歩みを進め、具体的には平面代数曲線の種数公式の確立を試みた。主定理はもとより加法定理の名にふさわしい形態を備えているが（これを「第一加法定理」と呼ぼう）、種数の決定もまた、加法定理と呼ばれるに足る状勢をあらしめるであろう（これを「第二加法定理」と呼ぼう）。なぜなら、任意個数のレムニスケート積分の和が一個のレムニスケート積分と等置されるように（レムニスケート積分の加法定理）、一般に種数 g のアーベル積分

$$\int_0^x f(x, y)\, dx$$

（$y=y(x)$ は x の代数関数であり、そのリーマン面の種数は g に等しい。
$f(x, y)$ は x と y の有理関数。）

の和

$$\int_0^{x_1} f(x_1, y_1)\, dx_1 + \int_0^{x_2} f(x_2, y_2)\, dx_2 + \cdots + \int_0^{x_n} f(x_n, y_n)\, dx_n$$

$$(y_1 = y(x_1),\ y_2 = y(x_2),\ \cdots,\ y_n = y(x_n))$$

は、加えられるべき積分の個数がどれほど多くても、つねに一定個数、すなわち g 個の積分の和

$$\int_0^{a_1} f(a_1, b_1)\, da_1 + \cdots + \int_0^{a_g} f(a_g, b_g)\, da_g$$

$$(b_1 = y(a_1),\ \cdots,\ b_g = y(a_g))$$

に帰着されると予想されるからである（アーベルが具体的に遂行したのは超楕円積分の場合のみであった。論文［Ａ－２］参照。また、取り上げられている積分が第二種もしくは第三種の場合には、代数－対数的な付加項が現われる）。このような状勢をあらしめることこそ、「パリの論文」の主題である。アーベルは任意個数の（同型の）アーベル積分和は一定個数の（同型の）アーベル積分和に帰着されていくことを発見し、その「一定個数」として、種数の概念を認識したのであった。

後にリーマンはヤコビの逆問題の解決にあたって第一加法定理を利用した。また、リーマン面の概念を根底に据えて、種数の意味を完全に解明したのも同じリーマンであった。これらの二点はリーマンとアーベルを連結する極めて直接的な接点である。

４．ヤコビの逆問題

ヤコビのアーベル積分論はアーベルの二種類の加法定理の解釈の試みを契機にして始まったが、直接の出発点はアーベルの論文［Ａ－２］であったから、考察

の対象はおのずと超楕円積分、すなわち

$$\int \frac{(A + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{m-2} x^{m-2})\ dx}{\sqrt{X}} = \prod(x)$$

（A，A_1，A_2，・・・，A_{m-2}は定数f（x）＝Xは2m 次もしくは2m-1次の多項式。）

という形の積分に限定されていた。アーベルの第一加法定理に対するヤコビの解釈は微分方程式論の立場に立つものであり、これによれば、第一加法定理はある種の代数的偏微分方程式系の代数的積分を求めるための解法理論とみなされるのである。リーマンが第一加法定理をヤコビの逆問題の解決に応用した際にも、このヤコビの解釈が採用されている。これに対して、アーベルの第二加法定理は、楕円積分に対する楕円関数のように、広くアーベル積分の世界の中で、加法定理を満足するある種の逆関数を発見するための掛け替えのない手掛りとして機能した。特に上記の超楕円積分 $\prod(x)$において、f（x）＝Xが５次もしくは６次の多項式の場合にはひときわ深い解析が行なわれ、その結果、首尾よく二変数ヤコビ関数発見への道が開かれたのであった。

この分野におけるヤコビの諸論文はヤコビ全集第二巻に収録されているが、わけてもヤコビ関数に関連して重要なのは下記の二論文である。

［Ｊ－１］「アーベル積分の一般的考察」
（１８３２年。全集，II，ｐｐ．５－１６）
［Ｊ－２］「アーベル積分の理論が依拠する二変数四重周期関数について」
（１８３４年。全集，II，ｐｐ．２５－５０）

もう一つの論文

［Ｊ－３］「アーベル関数に関する覚え書き」
（１８４５年。全集，II，ｐｐ．８５－８６）

はそれ自体としては簡単なメモにすぎないが、注目すべき点は、末尾の註記の中にヤコビの逆問題が明確な形で表明されていることである。その様子は次の通りである。

「関数ｘ＝ｓｉｎ am(ｕ)は<u>一次</u>方程式Ａ＋Ｂｘ＝０によってuに関して与えられる。ここではＡとＢは、変数uの実もしくは虚の各々の有限値に対してただ一つの有限値を取る、ｕの関数である。同様にして、上に確立された二つの方程式

$$\prod(x) + \prod(y) = u,\quad \prod_1(x) + \prod_1(y) = v$$

［ $\prod(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$，$\prod_1(x) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}$。f（x）＝Xは５次または６次の多項式。］

が与えられたとき、量ｘとｙは<u>二次</u>方程式

$$A+Bt+Ct^2=0$$

の二根であることが見いだされる。ここでＡ，Ｂ，Ｃは、二つの変数ｕとｖの実もしくは虚のあらゆる有限値に対してただ一つの有限値を取る、ｕとｖの関数である。」（全集，Ⅱ，ｐ．８６。下線を施した部分は、原文ではイタリック体で書かれて強調されている。）

ここでは係数Ａ，Ｂ，Ｃは二変数ｕ，ｖの一価関数であることが明瞭に主張されているが、そればかりではなく、論文［Ｊ－２］における精密な解析によれば、ｘ，ｙの基本対称式

$$x+y=-\frac{B}{C}\ ,\ xy=\frac{A}{C}$$

は四重周期をもつこと、すなわちアーベル関数であることが判明する。ゲーペルとローゼンハインはこれらを二変数テータ関数の商として表示することに成功し、そのようにして上記の事実を確定したのである。

この出来事の意味を考えるために、今、ヤコビにならって、連立方程式

$$\Pi(x)+\Pi(y)=u\ ,\ \Pi_1(x)+\Pi_1(y)=u'$$

の解ｘ，ｙを、ｕ，u'の関数として

$$x=\lambda(u,\ u')\ ,\ y=\lambda'(u,\ u')$$

と書き表わそう。また積分 $\Pi(x)$，$\Pi_1(x)$ の基本周期によって与えられる二次元アーベル多様体、すなわち関数$\sqrt{X}$のリーマン面Ｒ（$\sqrt{X}$）のヤコビ多様体を$\Sigma=\mathbb{C}^2(u,u')/\Gamma$ で表わそう。するとヤコビの逆問題の解決は、λ とλ'はΣ上の関数$\frac{B}{C}$，$\frac{A}{C}$を係数にもつ二次方程式

$$t^2+\frac{B}{C}t+\frac{A}{C}=0$$

を満足すること、すなわちλとλ'は四重周期をもつ二変数二価関数であること、すなわちλとλ'の存在域はΣ上に拡がる二葉の分岐被覆域であることを教えている。［超楕円積分$\Pi(x)$，$\Pi_1(x)$ の多価性はλ とλ' の四重周期性に反映し、λ とλ'の二価性は関数 $\sqrt{X}$のリーマン面Ｒ（$\sqrt{X}$）の種数が２であるという事実に由来する。］これがヤコビの逆問題とその解決の雛形である。我々はここで二つの基本的な論点に着目したいと思う。

第一の論点は二変数関数の導入という出来事の契機に関するものである。第一種楕円積分の逆関数への着目を通じて楕円関数というものの認識が生起したように、超楕円積分、一般にアーベル積分の世界にもある種の逆関数が存在し、等分

と変換の理論の本来の対象を形成すると考えられるであろう。ヤコビはそれを明るみに出そうとする意図をもって、論文［Ｊ－２］において、まず簡明直截に超楕円積分

$$u=\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} \quad (f(x)=X\text{は５次または６次の多項式})$$

の逆関数$x=\lambda(u)$を考察し、これは四重周期をもたなければならないという現象を観察した。ところが一変数の一価解析関数は二個以上の周期はもちえない（論文［Ｊ－２］）のであるから、$\lambda(u)$は一価ではありえない。それればかりではなく、楕円積分の場合と異なり、超楕円積分$\int\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$の多価性がその逆関数の周期性の中に完全に吸収されてしまうという現象はもう見られない。そうしてそのために、逆関数$\lambda(u)$は等分理論の対象にはなりえないのである。だが、ヤコビは「このほとんど絶望的な状勢において幸いにも生起する事柄」（全集，II，ｐ．４５）、すなわち二変数の四重周期関数の出現という現象に目を留めて、そのようにしてこの諒解しがたい困難を克服したのであった。このヤコビの卓抜な着眼こそ、多変数解析関数論の真実の起源である。

第二の論点はヤコビの逆問題の困難の所存に関するものである。連立方程式$\Pi(x)+\Pi(y)=u$，$\Pi_1(x)+\Pi_1(y)=u'$が与えられたとき、少なくとも局所的に見る限り、任意に与えられたu，u'に対してx，yが定まること、すなわちxとyを二変数u，u'の関数とみなしうることはおおよそ明らかである。それ故、この場合、ヤコビの逆問題において問題になるのは、基本対称式$x+y$，xyの一価性である。だが、一般に種数gのアーベル積分を取り上げて、連立方程式

$$\int_0^{x_1} f_1(x_1,y_1)\,dx_1+\int_0^{x_2} f_1(x_2,y_2)\,dx_2+\cdots+\int_0^{x_g} f_1(x_g,y_g)\,dx_g=u_1$$

$$\int_0^{x_1} f_2(x_1,y_1)\,dx_1+\int_0^{x_2} f_2(x_2,y_2)\,dx_2+\cdots+\int_0^{x_g} f_2(x_g,y_g)\,dx_g=u_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^{x_1} f_g(x_1,y_1)\,dx_1+\int_0^{x_2} f_g(x_2,y_2)\,dx_2+\cdots+\int_0^{x_g} f_g(x_g,y_g)\,dx=u_g$$

（$y=y(x)$はxの代数関数。そのリーマン面$R=R(y(x))$の種数をgとする。

$$\int f_1(x,y)\,dx,\ \int f_2(x,y)\,dx,\ \cdots,\ \int f_g(x,y)\,dx$$

はR上の一次独立なアーベル積分を表わす。）

を考察すると、今度は与えられたu_1，u_2，・・・，u_gに対するx_1，x_2，・・・，x_gの存在は全然明らかではない。それどころかむしろ、この論点はヤコビの逆問題における困難のすべてであり、逆問題そのものでもある。なぜなら、x_1，x_2，・・・，x_gの存在が確立されたとき、もしリーマン面の概念（これはヤコビの

逆問題が正しく設定されるために不可欠の大前提である）さえ前もって獲得されているならば、x_1, x_2, ・・・, x_g の基本対称式が u_1, u_2, ・・・, u_g の2g重周期をもつ一価関数になること、すなわちアーベル関数になることは明白だからである。そうしてこの意味において、リーマン面という高い立脚点に立つとき、ゲーペルとローゼンハインの研究は副次的な性格のものになってしまうのである（ただし、「アーベル関数のテータ関数による商表示の確立」という出来事はそれ自体において重要である。この事実の一般的背景を解明しようとする試みを通じて、やがて多変数関数論の主問題の一つが現われた）。

ヤコビの逆問題において、我々はゲーペルとローゼンハイン，リーマン，それにヴァイエルシュトラスによる、都合三通りの解法を手にしている。純粋に理論的にはともあれ、数学史の立場に立てば、これらの解法の分析と比較対照は極めて基本的であり、この謎めいた問題の真相を諒解する上で不可欠な作業であろうと思われる。

5．超楕円積分の等分と変換

アーベル関数とヤコビ関数の発見を受けて、我々がその次に取り組むべきテーマは等分と変換の理論である。実際、ヤコビは論文［J－2］の最終節（第11節）において超楕円積分の等分と変換に言及し、若干の基本的結果を書き留めている。与えられた u，u′に対して、連立方程式

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\sqrt{Y}} = u$$

$$\int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta y)\,dy}{\sqrt{Y}} = u'$$

（定数 α，β，α'，β' は、二つの積分 $\int\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$，$\int\frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}}$ が一次独立になるように選択する。f(x)＝Xは5次または6次の多項式。またY＝f（y））

によって定まるx，yをu，u′の関数、すなわちヤコビ関数として

$$x=\lambda(u,\ u'),\quad y=\lambda'(u,\ u')$$

と書き表わそう。このときアーベルの第二加法定理は、関数

$$x_n=\lambda(nu,\ nu'),\quad y_n=\lambda'(nu,\ nu')$$

は二次方程式

$$U_n x^2 - U_n' x + U_n'' = 0$$

の根として与えるられることを教えている。逆関数に移らずに積分の形のままで書き表わすと、x_n，y_n は連立方程式

$$n\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}+n\int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\sqrt{Y}}=\int_0^{x_n} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}+\int_0^{y_n} \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\sqrt{Y}}$$

$$n\int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}}+n\int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\,dy}{\sqrt{Y}}=\int_0^{x_n} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}}+\int_0^{y_n} \frac{(\alpha'+\beta' y)\,dy}{\sqrt{Y}}$$

を満足する量である。ここで U_n，U_n'，U_n'' は x，y，$\sqrt{X}$，$\sqrt{Y}$（$X=f(x)$，$Y=f(y)$）の有理関数である。それ故、逆に、x と y が与えられたとき、連立方程式

$$U_n x_n^2 - U_n' x_n + U_n'' = 0$$

$$U_n y_n^2 - U_n' y_n + U_n'' = 0$$

の解法を通じてx，yの値を定めることができるであろう。これが一般等分方程式である。特に、周期等分点においては x ＝y ＝0であるから、連立方程式

$$U_n' = 0,\ U_n'' = 0$$

を考えると、これは周期等分方程式である。このような情勢のもとでなされたヤコビの言明は下記の通りである（全集，II，p．50）。

（1）一般n等分方程式の次数は n^4 である。
（2）一般二等分方程式の次数は１６（＝2^4）である。この方程式は平方根のみを用いて解ける。
（3）周期等分方程式の根は既知という前提のもとで、一般n等分方程式の解法は四つのn次方程式の解法に帰着される。これは、与えられた変換は次々と適用される四つのn位変換の積に帰着される、という事実に基づいている。
（4）nは奇素数とするとき、周期n等分方程式の解法は $1+n+n^2+n^3$ 次の方程式と $\frac{n-1}{2}$ 次方程式の解法に帰着される。前者は一般に代数的に可解ではない。後者は代数的に可解である。［J．デュドネ編『数学史II』，岩波書店，には、「これらは根号によって解ける」（p．547）と記されているが、これは明晰さを欠く表現であり、誤りを含んでいる。］

また超楕円積分の変換については、

（５）ｎは奇素数とするとき、$1+n+n^2+n^3$ 個のｎ位変換が存在する。

という言明がなされている。

１８３４年１月にヤコビに宛てて書かれた手紙の中で、エルミートはヤコビの言明のうち等分理論に関するものを取り上げて、基礎的事実認識（１）を踏まえたうえで、（３）と（４）を完全に厳密に証明した
（ヤコビ全集，II，ｐｐ．８９－９６。およびエルミート全集，I，ｐｐ．１０－１７参照）。エルミートの論文

［Ｈ－１］「アーベル関数あるいは超楕円関数の等分について」
（全集，I，ｐｐ．３８－４８）

の中でも、同じ証明が再現されている。また、同じエルミートは論文

［Ｈ－２］「アーベル関数の変換理論について」
（１８５５年。全集，I，ｐｐ．４４４－４７８）

において、超楕円積分の変換理論の組織的考察を展開した。超楕円積分

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

（ｆ（ｘ）＝Ｘは５次または６次の多項式）

の変換とは、関数 $\sqrt{X}$ のリーマン面Ｒ（$\sqrt{X}$）に附随するヤコビ多様体$\sum$上の関数（アーベル関数）の変換にほかならず、しかもそれは、楕円関数の変換が一次元複素トーラスの変換に帰着されるのと軌を一にして、$\sum$それ自体（アーベル多様体）の変換に帰着されるのである。等分理論の対象がヤコビ関数であったのに対し、変換理論の対象はアーベル関数もしくはアーベル多様体である。このような乖離現象は楕円積分論の中には認められなかったものであり、真に瞠目に値すると言わなければならない。

さて、ヤコビの諸言明の中で最も注目に値すると思われるのは、第四番目の言明である。ここに明示されているように、ヤコビ関数の周期等分方程式の代数的可解性をめぐる状勢は、楕円関数の場合と全く同様である。そうして楕円関数の周期等分方程式の解法が帰着されていく二つの低次方程式のうち、一般には代数的に可解ではないと言われている、いわゆるモジュラー方程式の代数的可解条件が追い求められ、その中から虚数乗法論が生い立ったのであった。ではヤコビ関数の場合にも、我々は同様の道筋の存在を期待しうるであろうか。また数学史の流れの中に、いわば「一般化された虚数乗法論」ともいうべき理論の展開の軌跡を見いだそうとする試みは、はたして語るに足るだけの成果を収めることができるであろうか。この論点の解明こそ、アーベル積分論史の歴史的究明において、我々に課されている最大のテーマである。

６．隠された領域――――数論とアーベル積分論――――

アーベルに始まるアーベル積分論の小さな歴史を概観するものはだれしも、楕円積分論の場合に鑑みて、数論との関係、すなわち「一般化された虚数乗法論」の存在を感知して、深く思いを寄せることであろう。歴史的には、この隠された理論を明るみに出そうとする試みは、ヒルベルトとヴェイユの手によって、相異なる仕方で二度行われた。まずヒルベルトは「クロネッカーの青春の夢」のかなたにあるものを一般に多変数の保型関数論の視点から展望し、解析関数による類体の構成問題（「第１２問題」）を提出した。次にヴェイユは代数幾何学の視点からアーベル多様体論を構成し、志村・谷山によるアーベル多様体の虚数乗法論の基盤を設定した。そこで数学史の立場からは、１９世紀のアーベル積分論の遺産の中からこのような二種類の理論が取り出された際の思考様式を解明すること、および第三の理論展開の可能性を探ることが、重要な問題として提起されるべきであろう。ここでは簡単な数語を附言するだけに留めなければならないが、ヒルベルトの場合には、リーマン面の一意化理論の確立という出来事が重要な契機として働いている。志村・谷山理論では、理論の主眼は等分理論ではなくて変換理論に注がれていると考えるのが至当である。そうしてヤコビ関数の周期等分方程式の代数的可解条件の追求は、エルミート以降、全く行われていないと思われるので、おそらくこの論点の解明の途上に、「一般化された虚数乗法論」へと向かう第三の道が開かれてくるであろう。

なお最後の問いが残されている。それは一般化された虚数乗法論というものそれ自体の意味を問う問いである。私見によれば、この問いに対する解答は相互法則の中に見いだされ、まさしくそれ故に、一般化された虚数乗法論は数論と呼ばれるに足る資格を備えていると言えるのである。楕円関数論史においてアイゼンシュタインの理論が果たした役割の考察は、この問いの究明にあたってよい範例となり、我々の手に貴重なヒントをもたらしてくれるであろう。

――――平成３年（１９９１年）１１月２９日――――