モジュラー方程式について（続）

笠原　乾吉　（津田塾大学）

0.　1年前にもモジュラー方程式の話をした([8])。そこでは、楕円積分の変換における新旧母数の関係式、楕円関数の周期等分方程式の片割れの変換方程式、虚数乗法の特異母数方程式、Kleinのモジュラー方程式と4つのモジュラー方程式をあげ、その関係などについて述べた。

ここでは、それに若干の追加と修正をしたい。

1. 楕円積分の変換　微分方程式

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

が代数的な積分 $F(x,y) = 0$ を持つとき、楕円積分の変換という。特にn次有理式 $y = U(x) / V(x)$ を解に持つときにn次の変換という。$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u$ とおくと $x = \mathrm{sn}(u, k)$ で、$y = \mathrm{sn}(\frac{u}{M}, \lambda)$ となるから、$y = \mathrm{sn}(\frac{u}{M}, \lambda)$ を $x = \mathrm{sn}(u, k)$ の有理式で表わすこと、といってもよい。

n次変換が存在するような旧母数kと新母数λの関係式を、変換の母数の関係としてのモジュラー方程式、または簡単に高瀬氏はJacobiのモジュラー方程式と命名した。

$k' = \sqrt{1 - k^2}$，$\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ を補母数と言う。例をあげよう。

$n = 2$	$\lambda = (1-k')/(1+k')$	(Landen, 1775)
	$\lambda = 2\sqrt{k}\ /(1+k)$	(Gauss, 1797)
$n = 3$	$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1$	(Legendre, 1825)
$n = 11$	$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4k\lambda k'\lambda'} = 1$	(Sohnke, 1836)
$n = 23$	$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt{2}\ \sqrt[12]{4k\lambda k'\lambda'} = 1$	(Schroeter, 1884)

また、この表現形式を変えて、$u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$ とおくと

$n = 3 \qquad u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0$ 　　　(Jacobi, 1829)

$n = 5 \qquad u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1-u^4v^4) = 0$ 　(Jacobi, 1829)

となる。

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}, \quad \Lambda' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda'^2y^2)}}$$

とおく。

以後、nを奇素数に限定しておく。

Jacobi [6] はn次変換をn+1個構成し、その中には

$$\frac{\Lambda}{\Lambda'} = n\frac{K'}{K} \quad , \quad \frac{\Lambda}{\Lambda'} = \frac{1}{n}\frac{K'}{K}$$

を満たすものが存在することを示し、前者を第1変換、後者を第2変換と呼んだ。さらに $q = e^{-\pi K'/K}$ とおくとき、テータ関数で

$$k = \frac{\theta_2{}^2(q)}{\theta_3{}^2(q)}\ (= \varphi(q) \text{とおく}) \quad , \quad k' = \frac{\theta_4^2(q)}{\theta_3^2(q)}\ (= \psi(q)) \quad , \quad K = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(q)$$

とかけることを示した（記号は現在のものにしておく）。そうすると、第1変換でいうと $\lambda = \varphi(q^n)$ となり、モジュラー方程式は $\varphi(q)$ と $\varphi(q^n)$ との関係式ということになる（第2変換なら、$\varphi(q)$ と $\varphi(q^{1/n})$ との関係式だが、qを q^n とおきかえれば同じものになる）。

先に［1］にしたがって、いくつかのモジュラー方程式をかいてみる。$q = e^{\pi i\tau}$ とおき、$\varphi(q) = \varphi_1(\tau)$ とかくと、$k = \varphi_1(\tau)$, $\lambda = \varphi_1(n\tau)$ である。

(a) k^2 と λ^2 の関係式。

$$W_n(x, \varphi_1{}^2) = (x - \varphi_1{}^2(n\tau)) \prod_{\nu=0}^{n-1} (x - \varphi_1^2(\tfrac{\tau+2\nu}{n}))$$

とおくと、これは整数係数のxと $\varphi_1{}^2(\tau)$ の多項式である。ゆえに

$$W_n(\lambda^2, k^2) = W_n(\varphi_1{}^2(n\tau), \varphi_1{}^2(\tau)) = 0\text{。}$$

(b) $u = \sqrt[4]{k}$ と $v = \sqrt[4]{\lambda}$ との関係式。

α を1の原始n乗根とし

$$\Omega_n(x, \varphi^{1/4}) = (x - (-1)^{(n^2-1)/8}\varphi(q^n)^{1/4}) \prod_{\nu=0}^{n-1} (x - \varphi(\alpha^{8\nu}q^{1/n})^{1/4})$$

とおく。これは整数係数の x と $\varphi(q)^{1/4}$ の多項式である。ゆえに

$$\Omega_n((-1)^{(n^2-1)/8}v\,,\,u)=0_{\circ}$$

(c) $J=\dfrac{4}{27}\dfrac{(k^4-k^2+1)^3}{k^4(1-k^2)^2}$ と $J'=\dfrac{4}{27}\dfrac{(\lambda^4-\lambda^2+1)^3}{\lambda^4(1-\lambda^2)^2}$ との関係式。

このJの式の k に $\varphi_1(\tau)$ を代入し、1728をかけたものを $j(\tau)$ とかく。そうすると、J′のほうは $j(n\tau)$ となる。

$$\Phi_n(x,j)=(x-j(n\tau))\prod_{\nu=0}^{n-1}(x-j(\frac{\tau+\nu}{n}))$$

とおくと、これは整数係数の x と $j(\tau)$ との多項式である。ゆえに

$$\Phi_n(1728J',\,1728J)=0\ \circ$$

これは前回（［8］）にKleinのモジュラー方程式とよんだものである。なお、平松豊一氏から文献［2］を教えていただいた。そこでは、$n\dfrac{K'}{K}=\dfrac{\Lambda'}{\Lambda}$ をみたすときの k と λ の関係式が n 次の Ramanujanのモジュラー方程式とよばれている。彼は、k, k', λ, λ' を用いて、$n=3,5,7,11,23$ のときに既知の式を、$n=13,17,19,31,47,71$ のときに新しい形の式を導いた（Hardy [5]による。原論文は見ていない）。しかし、これは変換の母数関係式としてのモジュラー方程式そのものである。

2．モジュラー関数 J(τ)

モジュラー関数Jと、それを用いたモジュラー方程式 $F_n(X,Y)=0$ の発見者は Dedekind（1877 [3]）である。Klein（1878/79 [9]）も独立に発見し、その論文のはじめに Dedekindの論文をあげた上で、私は1877年9月21日のある会合で Dedekindの結果を知らないで発表した、と主張している。また、JとJ′の形のモジュラー方程式は1867年にF.Müllerが学位論文で扱ったともKleinは述べているが、第一発見者はDedekindとしてよいだろう。

Dedekindの論文の詳細な要約が Gray [4] にあるので、ここでは簡単にふれておく。彼は上半平面での SL(2,Z) の基本領域を求め、その半分を Riemann の写像定理で上半平面に等角写像し、その関数をSL(2,Z) の作用で、上半平面全体に解析接続する。この方法でモジュラー関数 J(τ) を定義する。ただし、J(τ) は Klein の記号で、Dedekind は Valenz

（原子価？）とよび、val(τ)とかく。ここではJ(τ)で書くことにする。Jは上半平面からリーマン球面への解析関数だが、その逆関数の分岐のしかたを、無限遠点もこめて調べる。微分方程式を調べた上で、Dedekindのη関数として有名な関数を

$$\eta(\tau) = \text{const.} \cdot J(\tau)^{-1/6}(1 - J(\tau))^{-1/8}\left(\frac{dJ}{d\tau}\right)^{1/4}$$

と導入する。

そして、その２次の変換 $\eta_1(\tau) = \eta\ (2\tau)$, $\eta_2(\tau) = \eta\ (\frac{\tau}{2})$, $\eta_3(\tau) = \eta\ (\frac{1+\tau}{2})$ を導入し、楕円積分の母数 k, k′ をこれらで表す。さらに、J を k で表す式もえられている。

変換と題する最後の節で、整数で AD - BC = n を満たすものに対し
J((C+Dτ) / (A+Bτ))の値で異なるものがいくつあるかを調べ、それが

$$J\left(\frac{c+d\tau}{a}\right) \quad , \quad ad = n \quad , \quad 0 \leq c < a \quad , \quad (a, c, d) = 1$$

であること、この個数が $\nu = n\prod(1+\frac{1}{p})$,（p は n の素因数）となることを示す。これを $f_1(\tau), f_2(\tau), \cdots, f_\nu(\tau)$ とおき、$\prod_{i=1}^{\nu}(x - f_i(\tau))$ が、x と J(τ)の多項式 $F_n(x, J(\tau))$ であることを示す。方法は x の多項式としての係数が上半平面で正則、SL(2,Z)で不変、そして ∞ での様子を調べることによる。さらに、F_n が既約であること、J(τ) = Y とおいたとき、$F_n(X, Y) = F_n(Y, X)$ であることを示す。最後に予想として、Dedekind は F_n の係数は有理数であろうと述べ、さらに虚数乗法の特異母数が、$F_n(X, X)$ かまたは $F_n(X, Y)$ の判別式を調べることによってえられるであろう、そしてそれが２次形式の合成に本質的な役割を果たすが、これらは後日を期するという。

Dedekind は n が素数でないときも含めて論じており、この F_n は前節 (c) の Φ_n と本質的に同じものである。Gray もいうように、この論文があまりにも現代的なのには驚かされる。$q = e^{\pi i \tau}$ による級数展開とその係数の性質などを除いては、基本的なことはほとんど Dedekind によって発見されている。

3．Kleinの場合

Kleinは、楕円積分

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

に対し、不変量

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 \quad , \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} , \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \quad , \; J = \frac{g_2^3}{\Delta}$$

と定義し、Jを絶対不変量という（今日ではKleinの絶対不変量Jとよばれる）。

（2）の分母 f(x) の零点の非調和比を σ とすると

$$J = \frac{4}{27}\frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}$$

である。Jacobiのsn関数の場合、すなわち $f(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ のときには、根の比調和比（の一つ）は $\sigma = k^2$ である。（2）の逆関数の周期比を τ とする。

（$f(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ のときは 4K と 2iK′ が基本周期で、周期比は iK′/2K であるが、実は背景に $f(x) = x(1-x)(1-k^2x)$ の場合があり、このときには 4K と 4iK′ が周期で、周期比は τ = iK′/K となる。それで歴史の継続性から τ = iK′/K とするのだ、と Kleinはいう。） Jを $\sigma = k^2$ の関数とみて、さらに、σ を τ の関数とみて、そのリーマン面の構造から、$J(\tau)$ が SL(2, Z) に関し保型的であることを導く。モジュラー方程式 $F_n(J(n\tau), J(\tau)) = 0$ を考え、$J' = J(n\tau)$ をJ上のリーマン面と考え、その構造を調べる。やはり Gray [4] に要約されているので、ここではこの先は省略する。

4. 私はモジュラー方程式とは何か、19世紀の人々がそれをどう考えていたかを興味の中心においている。KleinはDedekindをこえて多くの結果を得ているが、私の立場からはDedekindの方が先で、前回にKleinのモジュラー方程式とよんだのはDedekindのと修正しなければならない。楕円関数の変換理論については、Abelの方が先んじているが、後世に引用されるときにはJacobiのFandamenta nova [6]が便利で記号などでもそちらが用いられる。これとモジュラー関数JについてのDedekindとKleinは似ている。

1節であげた k^2 と λ^2 との関係式 W_n，uとvの関係式 Ω_n の証明は、$k^2 = \varphi_1{}^2(\tau)$ が SL(2, Z) の部分群 $\Gamma(2)$ に関するモジュラー関数であること、uもある群に関し保型的なことを理由にして、Dedekindの F_n のときと同様に証明される（証明は [1] をみよ）。

モジュラー方程式は、やはり楕円積分の変換の新旧母数の関係式というのが基本である。それは Landen (1775) にはじまり、Gauss, Legendre に起源をもつ。Abel, Jacobiによ

る変換理論の完成がそのあとにくる。新旧母数の関係を表わす表現形式はいろいろある。母数k、λを$u=\sqrt[4]{k}$，$v=\sqrt[4]{\lambda}$とおきその関係式で表すこと、それをJacobiのモジュラー方程式とよび、Kleinの記号によるJとJ'の関係式をDedekindのモジュラー方程式（または、Dedekind - Kleinのそれ）とよぶのが妥当かもしれない。Ramanujanのは、Ramanujanの「モジュラー方程式の計算法」というべきかもしれない。もっとも、彼のk，λ，k'，λ'による表示式は簡単できれいだから、その式自身をRamanujanのモジュラー方程式とよんでもよい。

特異母数の方程式は特異「モジュラー方程式」ではなくて、「特異モジュラー」方程式である。しかし、Dedekindが予想しそれが正しかったように、モジュラー方程式$\Phi_n(X,Y)$に対し、$\Phi_n(X,X)$の既約因子）が「特異モジュラー」方程式になるから、「　　」をつけなくてもよいだろう。

前回にWeberの本のモジュラー方程式とよんだ、周期等分方程式の変換方程式は、上の意味のモジュラー方程式と密接に結びついている。しかし、Abelによる周期等分方程式の研究が1827年～1828年、変換理論の完成がやはり1828年～1829年であることを考えると、Galois が1832年にその遺書の中で、周期等分方程式の群に対応するモジュラー方程式の群は・・・　と述べていることは、私にはいまだに意外である（Galois の遺書のこの部分の日本語訳は、山下純一［11］P.283～，英語訳はGray [4] p.172～）。

文献

[1] J.M. and P.B.Borwein, Pi and AGM , John Wiley , (1987).

[2] B.C. Berndt, Ramanujan's Modular Equations , Ramanujan revisited , Academic Press , 313 - 333 (1988).

[3] R.Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptishen Modulfunktionen , J.Reine Angew. Math. 83 (1877).　全集1巻 , 174 - 201.

[4] J.Gray , Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré , Birkhäuser , (1986).

[5] G.H.Hardy, Ramanujan , Chelsea , (1978).

[6] C.G.Jacobi , Fundamenta nova theoriae funcionum ellipticarum , (1829). 全集 1 巻 , 174 - 201.

[7] 笠原乾吉 , モジュラー方程式とエルミートの 5 次方程式の解法 , 数学セミナー, 1988 年 7月, 77-82, 8月, 65-69. (現代数学史研究会編 : 現代数学のあゆみ, 第 4 集, 日本評論社 (近刊) に, 追記を加えて収録の予定).

[8] 笠原乾吉 , モジュラー方程式について , 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 1 , 1 - 9 (1991).

[9] F.Klein , Über die Transformation der elliptischer Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades , Math. Ann. , 14 (1878/79). 全集 1 巻 , 13 - 75.

[10] 三宅克也 , デデキントの数論について , 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 1 , 22 - 31 (1991).

[11] 山下純一 , ガロアへのレクイエム , 現代数学社 (1986).