三角関数の一般化をめぐって

黒川信重（東大・理）

§0. はじめに

三角関数は古代から知られていた関数であり，ピタゴラスにちなむ（実質的にはより古い）関係式 $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$ やアルキメデス（が少なくとも発見していたところ）の加法公式 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ 等，ギリシャ時代には基本性質が発見されていた。現在の三角関数論の形は，$\sin x$ の無限積展開 $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ などを含め，オイラーの『無限小解析入門』（1749）で整えられた。また，ガウスのレムニスケート・サイン関数やヤコビの sn－関数はサイン関数の一般化を目指して発見された。

本文では，このような，よく知られた楕円関数論・アーベル関数論的拡張の方向（その歴史についてここで触れる必要はないであろう）とは違った，別の拡張の歴史をたどってみたい。この拡張は多重サイン関数（多重コサイン関数なども考えられる）と呼ばれるにふさわしいものであり，新谷先生の研究[3]（1977）において使われていたのであるが，もともとはヘルダー[1]（1886）が初めて捉えたものである。彼らは

2次の場合のみを考えたが，ここでは高次の場合も考える。このようにすることによって多重サイン関数の特徴がよりわかりやすくなる。

多重サイン関数は，現在までその名が他で使われたことはなく（初出は黒川[5][5a][5b]）ほとんど認識さえされなかったが（たとえば，新谷先生の論文において『2重サイン関数』（double sine function）の名称が使われていたら，有理数体 $\mathbb{Q}$ のサイン関数——通常のサイン関数になることがゼータ正規化を用いて§1で示される——の類似を実2次体に対して考えようとしていることが明確になり，論文内容がより広く知られたのではないであろうか？），クロネッカーの青春の夢（ヒルベルトの第12問題）の観点からは，まず第1に考えられるべき自然な関数であることが判明する。

この文章では§1で環のサイン関数の視点から問題を提起し，§2ではヘルダー型の素朴な多重サイン関数を導入し，§3では新谷型の一般周期の多重サイン関数を見る。§4では，多重サイン関数を特別な場合として含む多重ゼータ関数を構成すると多重サイン関数の性質（“オイラー積”など）が統一的に解釈できることを述べる。§5では $\mathbb{F}$ 類似に触れる。

多重サイン関数の分野では，なされていた事は多くなく，

必然的に筆者の仕事の記述が大部分を占めることになってしまった。また，ほとんど知られていない領域なので，なるべく証明をつける事にしたが紙数の関係もあり充分ではない。この文章がきっかけとなって新谷先生の研究がより広く認識されることになれば幸いである。

内容：

§1. 環のサイン関数

通常のサイン関数の無限積表示（オイラー 1735）は

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \pi x \prod_{m=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{x}{m}\right)e^{\frac{x}{m}}$$

である。ただし，$\prod_m{}'$ は $m=0$ を除く積である。これは形式的無限積 $\prod_{m=-\infty}^{\infty}(m-x)$ を収束するように（意味をもつように）正規化したものだと考えられるが，実際にそうなっていることは最近ゼータ正規化によりデニンジャー[6]が

示した。

我々には次の定式化がよい。(レディンジャーとは少し異なる。) 一般に，複素数の可算集合Λに対し，そのゼータ関数を $\zeta_\Lambda(s) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda^{-s}$ (ただし，$\lambda^{-s} = \exp(-s\cdot\log\lambda)$，$-\pi < \arg(\log\lambda) \leq \pi$) とし，$\prod_{\lambda\in\Lambda} \lambda = \exp(-\zeta_\Lambda'(0))$ と定義する。これを，無限積 $\prod_{\lambda\in\Lambda}\lambda$ のゼータ正規化という：

$-\zeta_\Lambda'(s) = \sum_\lambda \log\lambda\cdot\lambda^{-s}$ により形式的には

$$\exp(-\zeta_\Lambda'(0)) = \exp\left(\sum_\lambda \log\lambda\right) = \prod_\lambda \lambda$$

となっていることに注意。このとき，次の結果が成立する。

定理A

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty}(m+x) = \begin{cases} 1-q_x & \cdots \operatorname{Im}(x)>0 \\ 1-q_x^{-1} & \cdots \operatorname{Im}(x)<0. \end{cases}$$

ただし，$q_x = e^{2\pi i x}$.

(証明) $\varphi(s,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+x)^{-s}$ とおくと，フルビッツ・ゼータ関数 $\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}$ を用いて

$$\varphi(s,x) = \begin{cases} \zeta(s,x) + e^{-i\pi s}\zeta(s,1-x) & \cdots \operatorname{Im}(x)>0 \\ \zeta(s,x) + e^{i\pi s}\zeta(s,1-x) & \cdots \operatorname{Im}(x)<0 \end{cases}$$

となることが，log の arg を見ることによりわかる。s についての微分を ′ で表わせば

$$\varphi'(s,x)=\begin{cases}\zeta'(s,x)+e^{-i\pi s}\zeta'(s,1-x)-i\pi e^{-i\pi s}\zeta(s,1-x) & \cdots\ Im(x)>0\\ \zeta'(s,x)+e^{i\pi s}\zeta'(s,1-x)+i\pi e^{i\pi s}\zeta(s,1-x) & \cdots\ Im(x)<0.\end{cases}$$

したがって

$$\varphi'(0,x)=\begin{cases}\zeta'(0,x)+\zeta'(0,1-x)-i\pi\zeta(0,1-x) & \cdots\ Im(x)>0\\ \zeta'(0,x)+\zeta'(0,1-x)+i\pi\zeta(0,1-x) & \cdots\ Im(x)<0.\end{cases}$$

さて，

$$\Gamma_1(x)=\left(\prod_{n=0}^{\infty}(n+x)\right)^{-1}=\exp\left(\zeta'(0,x)\right)$$

とおくと，

$$\Gamma_1(x)=\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$$ となる。

さらに，オイラーの関係式

$$\boxed{\left[\Gamma_1(x)\,\Gamma_1(1-x)\right]^{-1}=2\sin(\pi x)}$$

が成立する（これは多重ガンマ関数と多重サイン関数の関係として一般化される —— 後述）。

また，$\zeta(0,x)=\frac{1}{2}-x$ である。よって

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty}(m+x)=\exp\left(-\varphi'(0,x)\right)$$

$$=2\sin(\pi x)\times\begin{cases}e^{i\pi(x-\frac{1}{2})} & \cdots\ Im(x)>0\\ e^{-i\pi(x-\frac{1}{2})} & \cdots\ Im(x)<0\end{cases}$$

$$= \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{i} \times \begin{cases} -i e^{i\pi x} & \cdots \mathrm{Im}(x) > 0 \\ i e^{-i\pi x} & \cdots \mathrm{Im}(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - q_x & \cdots \mathrm{Im}(x) > 0 \\ 1 - q_x^{-1} & \cdots \mathrm{Im}(x) < 0 . \end{cases}$$

（証明終）

さて，一般に可換環 A に対して，そのサイン関数 $S_A(x)$ を $S_A(x) = \prod_{a \in A} (x - a)$ と定義しよう。

すると，定理 A は

$$S_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 1 - q_x & \cdots \mathrm{Im}(x) > 0 \\ 1 - q_x^{-1} & \cdots \mathrm{Im}(x) < 0 \end{cases}$$

を示している。次の結果を用いると，τ が虚 2 次整数であって $0 < \mathrm{Im}(x) < \mathrm{Im}(\tau)$ のとき

$$S_{\mathbb{Z}[\tau]}(x) = (1 - q_x) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n q_x)(1 - q_\tau^n q_x^{-1})$$

となることがわかる。これは σ-関数 $\doteqdot$ ϑ_1-関数 $\doteqdot$ Siegel-関数である。

定理 B 複素数 τ，x が $0 < \mathrm{Im}(x) < \mathrm{Im}(\tau)$ をみたすとき $$\prod_{m,n=-\infty}^{\infty} (m + n\tau + x) = (1 - q_x) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n q_x)(1 - q_\tau^n q_x^{-1}) .$$

(証明) バーンズ[2a]の "2重フルビッツ ゼータ関数"

$$\zeta_2(s, x, (\omega_1, \omega_2)) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ \text{整数}}} (m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + x)^{-s}$$

と 2重ガンマ関数

$$\Gamma_2(x, (\omega_1, \omega_2)) = \left[\prod_{m_1, m_2 \geq 0} (m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + x)\right]^{-1}$$

$$= \exp\left(\zeta_2'(0, x, (\omega_1, \omega_2))\right)$$

を用いる。いま，$\varphi(s, x, \tau) = \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} (m + n\tau + x)^{-s}$ と

おくと

$$\varphi(s, x, \tau) = \zeta_2(s, x, (1, \tau)) + e^{-i\pi s}\zeta_2(s, 1-x, (1, -\tau))$$
$$+ e^{i\pi s}\zeta_2(s, 1+\tau-x, (1, \tau)) + \zeta_2(s, x-\tau, (1, -\tau))$$

となる。(log の arg を見る。) したがって

$$\prod_{m, n = -\infty}^{\infty} (m + n\tau + x) = \left[\Gamma_2(x, (1, \tau))\Gamma_2(1-x, (1, -\tau))\Gamma_2(1+\tau-x, (1, \tau))\Gamma_2(x-\tau, (1, -\tau))\right]^{-1}$$
$$\times \exp\left(i\pi\left\{\zeta_2(0, 1-x, (1, -\tau)) - \zeta_2(0, 1+\tau-x, (1, \tau))\right\}\right).$$

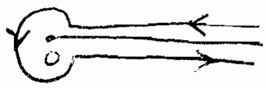
ここで，次の2つの事実①②を使うと定理Bを得る。

①(直接計算) $\zeta_2(0, 1-x, (1, -\tau)) = -\frac{1}{2\tau}\left(x^2 - x + \frac{1}{6} + \frac{\tau^2}{6} - \tau x + \frac{\tau}{2}\right)$

$$= -\zeta_2(0, 1+\tau-x, (1, \tau)).$$

これは

$$\zeta_2(s,x,(\omega_1,\omega_2)) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-xt}(-t)^{s-1}}{(1-e^{-\omega_1 t})(1-e^{-\omega_2 t})}dt$$

C :  $+\infty$

より

$$\zeta_2(0,x,(\omega_1,\omega_2)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{e^{-xt}}{(1-e^{-\omega_1 t})(1-e^{-\omega_2 t})}\cdot\frac{dt}{t}$$

$$= \operatorname*{Res}_{t=0}\left(\frac{e^{-xt}}{(1-e^{-\omega_1 t})(1-e^{-\omega_2 t})}\cdot\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\omega_1^2+\omega_2^2+3\omega_1\omega_2}{12}-x\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$

となりわかる。

② (バーンズ[2a]－新谷[3c])

$$\left[\Gamma_2(x,(1,\tau))\Gamma_2(1-x,(1,-\tau))\Gamma_2(1+\tau-x,(1,\tau))\Gamma_2(x-\tau,(1,-\tau))\right]^{-1}$$

$$=2q_\tau^{\frac{1}{12}}\sin(\pi x)\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n q_x)(1-q_\tau^n q_x^{-1})\right]\times\exp\left(\frac{\pi i}{\tau}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right)$$

これは $\left[4つの\ \Gamma_2\ の積\right]^{-1} = \sigma$-関数

という等式である。バーンズ[2a]は，この等式をはじめとして多数の楕円関数を2重ガンマ関数に分解している。（証明終）

なお，古典的なクロネッカー極限公式を次のスターク[4]による形に定式化しておくと，定理B（および定理A）は"絶対値なし

のクロネッカー極限公式”と見ることができる。

定理（クロネッカーの極限公式）

$\mathrm{Im}(\tau)>0$ のとき

$$\prod_{m,n=-\infty}^{\infty} |m+n\tau+x| = \left|(1-q_x)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n q_x)(1-q_\tau^n q_x^{-1})\right| \times \left|\exp\left(\pi i\left\{\frac{\tau}{6}-x+\frac{x(x-\bar{x})}{\tau-\bar{\tau}}\right\}\right)\right|.$$

また，

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty}|m+x| = 2|\sin(\pi x)| = e^{\pi|\mathrm{Im}(x)|}\times\begin{cases}|1-q_x| & \cdots\ \mathrm{Im}(x)\geq 0\\ |1-q_x^{-1}| & \cdots\ \mathrm{Im}(x)\leq 0.\end{cases}$$

絶対値なし版の簡明さは印象的である。なお，クロネッカーの極限公式から絶対値をはずすことの必要性はヘッケが指摘している（E. Hecke "Analytische Funktionen und Algebraische Zahlen II" Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 3 (1924) 213–236；§5 "Die zu $\log\eta(\tau)$ analogen Funktionen"）。

さて，すでに述べた $S_{\mathbb{Z}}(x)$, $S_{\mathbb{Z}[\tau]}(x)$ の場合から次が期待される：大域体 F に対して

$$\boxed{F^{ab} = F(S_{\mathcal{O}_F}(F))}.$$

ただし，$\mathcal{O}_F$ は F の整数環，F^{ab} は F の最大アーベル拡大体。これは，F が有理数体 $\mathbb{Q}$ および虚2次体 $\mathbb{Q}(\tau)$ の場合は

クロネッカー(1853) および高木(1920) [$\tau=\sqrt{-1}$ は高木(1903), $\tau=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ は竹内端三(1916)による] による有名な結果であり，標数 p の場合はカーリッツ(1935)－ドリンフェルト(1974)の結果である。このように，$S_{\mathcal{O}_F}(x)$ はクロネッカーの青春の夢を拡張された形で実現する可能性のある関数であるが，一般にある関数の"等分点" $F/\mathcal{O}_F$ における値が考えられるためには $\mathcal{O}_F$－周期性が必要であり，$S_{\mathcal{O}_F}(x)$ はその意味で最も簡単なものであることは構成から明らかである。なお，環のサイン関数を符号(あるいは重み) $w: A \to \mathbb{Z}$ に付随した符号付サイン関数 $S_A^w(x)=\prod_{a\in A}(x-a)^{w(a)}$ に拡張しておくことは，多重サイン関数や多重ゼータ関数の考察から自然であり，また必要である。

§2. ヘルダー型の素朴な多重サイン関数

1886年 ヘルダー[1]は次の関数を考えた。

$$F(x)=e^x\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n e^{2x}\right]=e^x\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' P_2\left(\frac{x}{n}\right)^n .$$

ただし，$P_2(x)=(1-x)\exp\left(x+\frac{x^2}{2}\right)$.

残念ながら，ヘルダーは，単に関数という意味から $F(x)$ としか書いておらず"2重サイン関数"という名前を付けなかった。我々は，統一的に見やすくするため $F(x)$ の代りに，

2重サイン関数 $\mathcal{S}_2(x)$ と固有名をつけることにし，以下これを用いる。ヘルダーは次の①〜⑧を示した。

①（微分方程式） $\dfrac{\mathcal{S}_2'}{\mathcal{S}_2}(x) = \pi x \cot(\pi x)$.

② $\mathcal{S}_2(-x) = \mathcal{S}_2(x)^{-1}$.

③（周期性） $\mathcal{S}_2(x+1) = -2\sin(\pi x)\,\mathcal{S}_2(x)$.

④ $\mathcal{S}_2(x)\,\mathcal{S}_2(1-x) = 2\sin(\pi x)$.

⑤ $\mathcal{S}_2(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$.

⑥ $$\begin{cases} \mathcal{S}_2(2k+\frac{1}{2}) = (-1)^k 2^{2k}\sqrt{2} \\ \mathcal{S}_2(2k+\frac{3}{2}) = (-1)^{k+1} 2^{2k+1}\sqrt{2} \end{cases} \quad \cdots\ k=0,1,2,\cdots.$$

⑦（N倍角の公式，乗法公式）

$$\left\{\mathcal{S}_2(x)\,\mathcal{S}_2(x+\tfrac{1}{N})\cdots\mathcal{S}_2(x+\tfrac{N-1}{N})\right\}^N = 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \sin\pi(x+\tfrac{1}{N})\,\sin^2\pi(x+\tfrac{2}{N})\cdots\sin^{N-1}\pi(x+\tfrac{N-1}{N})\,\mathcal{S}_2(Nx)$$

$N=1,2,3,\cdots$.

⑧（"オイラー積"）

$$\mathcal{S}_2(x) = \exp\left(\frac{\pi i x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\mathcal{L}i_2(1-e^{-2\pi i x})\right),$$

ただし $|1-e^{-2\pi i x}| < 1$ とする。

ここで，$\mathcal{L}i_2(x)$ は r 重対数 (poly-logarithm) $\mathcal{L}i_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^r}$ の $r=2$ の場合 (di-logarithm) である。

ヘルダーの論文は重要であると同時に，古く入手が困難なのでこれらの証明をたどってみよう。

そのために，次数1の（通常の）サイン関数の場合を復習して

おく。このときは,

$$\mathcal{S}_1(x) = 2\sin(\pi x) = 2\pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$= 2\pi x \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' P_1\left(\frac{x}{n}\right),$$

$P_1(x) = (1-x)e^{x}$, である。次が成立する:

①′ $\dfrac{\mathcal{S}_1'}{\mathcal{S}_1}(x) = \pi\cot(\pi x)$.

②′ $\mathcal{S}_1(-x) = -\mathcal{S}_1(x)$.

③′ $\mathcal{S}_1(x+1) = -\mathcal{S}_1(x)$.

④′ $\mathcal{S}_1(x) = \mathcal{S}_1(1-x)$.

⑤′ $\mathcal{S}_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

⑥′ $\mathcal{S}_1\left(2k+\frac{1}{2}\right) = 2$ $\cdots\ k = 0,1,2,\cdots$.

$\mathcal{S}_1\left(2k+\frac{3}{2}\right) = -2$

⑦′ $\mathcal{S}_1(x)\mathcal{S}_1\left(x+\frac{1}{N}\right)\cdots\mathcal{S}_1\left(x+\frac{N-1}{N}\right) = \mathcal{S}_1(Nx)$, $N = 1,2,3,\cdots$.

⑧′
$$\mathcal{S}_1(x) = \begin{cases} \exp\left(-\mathcal{L}i_1\left(e^{2\pi i x}\right) - \pi i x + \frac{\pi i}{2}\right) & \cdots\ \mathrm{Im}(x) > 0 \\ \exp\left(-\mathcal{L}i_1\left(e^{-2\pi i x}\right) + \pi i x - \frac{\pi i}{2}\right) & \cdots\ \mathrm{Im}(x) < 0. \end{cases}$$

これら ①′-⑧′ は よく知られている事実である。

①〜⑧ の証明は 次のとおり:

① は 対数微分を とることにより

$$\frac{\mathcal{S}_2'}{\mathcal{S}_2}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n\left(\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x+n} \right) + 2 \right\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2-n^2}$$

$$= \pi x \cdot \cot(\pi x) .$$

なお，これから，$\mathcal{S}_2(x)$ は 2階の（非線型な）代数的微分方程式（それは Painlevé III 型と呼ばれるものに似ている）をみたすことがわかる。後に $r \geqq 2$ に一般化した形でのべる。

② は明らか。

③ $$\mathcal{S}_2(x+1) = C \cdot \sin(\pi x)\, \mathcal{S}_2(x)$$

$C =$ 定数となることは，この両辺の対数微分をとって ① を用いればわかる。したがって

$$\frac{\mathcal{S}_2(x+1)}{x} = C \cdot \frac{\sin(\pi x)}{x} \mathcal{S}_2(x)$$

より（$\mathcal{S}_2(x)$ は $x=1$ で 1位の零点をもつ）$x \to 0$ として

$$\mathcal{S}_2'(1) = C\pi \quad \text{から} \quad C = \frac{\mathcal{S}_2'(1)}{\pi} \quad \text{を得る。}$$

（$\mathcal{S}_2(0)=1$ に注意。）一方 $\mathcal{S}_2'(1)$ は

$$\mathcal{S}_2(x) = \lim_{N\to\infty} e^{(2N+1)x} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n$$

から

$$\mathcal{S}_2'(1) = -\lim_{N\to\infty} e^{2N+1} \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdots (N-1)^N}{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdots (N+1)^N}$$

$$= -\lim_{N\to\infty} e^{2N+1}\cdot N^{-2N+1}\left((N-1)!\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-N}$$

$$= -\lim_{N\to\infty} e^{2N+1}\cdot N^{-2N+1}\left(\sqrt{2\pi}\, e^{-N} N^{N-\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-N}$$

$$= -2\pi$$

と求まる。

④は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(x)\mathcal{S}_2(1-x) &\overset{③}{=} \mathcal{S}_2(x)\left(2\sin(\pi x)\mathcal{S}_2(-x)\right) \\ &= \left(\mathcal{S}_2(x)\ \mathcal{S}_2(-x)\right)2\sin(\pi x) \\ &\overset{②}{=} 2\sin(\pi x)\ \left(=\mathcal{S}_1(x)\right). \end{aligned}$$

⑤

$$\left.\begin{array}{l} ④ \text{で } x=\frac{1}{2} \text{ とおくと } \mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=2 \\ \mathcal{S}_2(x) \text{ は } 0<x<1 \text{ で正} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.$$

⑥ は ⑤ と ③ から。

⑦ 両辺の対数微分を比較することにより

$$\left\{\mathcal{S}_2(x)\,\mathcal{S}_2\left(x+\frac{1}{N}\right)\cdots\mathcal{S}_2\left(x+\frac{N-1}{N}\right)\right\}^N = C\sin\pi\left(x+\frac{1}{N}\right)\cdots\sin^{N-1}\pi\left(x+\frac{N-1}{N}\right)\mathcal{S}_2(Nx),$$

$C=$定数，となることがわかる。 $x=0$ とおいて

$$\begin{aligned} C &= \frac{\left\{\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{N}\right)\cdots\mathcal{S}_2\left(\frac{N-1}{N}\right)\right\}^N}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{N}\right)\cdots\sin^{N-1}\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)^N}{\prod_{k=1}^{N-1}\sin^k\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{N-1}\left\{\mathcal{S}_2\left(\frac{k}{N}\right)\mathcal{S}_2\left(\frac{N-k}{N}\right)\right\}^N}{\prod_{k=1}^{N-1}\sin^k\left(\frac{k\pi}{N}\right)\sin^{N-k}\left(\frac{(N-k)\pi}{N}\right)}} \end{aligned}$$

$$\overset{④}{=} \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{N-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{N}\right)^N}{\prod_{k=1}^{N-1}\left(\sin\frac{k\pi}{N}\right)^N}}$$

$$= \sqrt{2^{N(N-1)}} = 2^{N(N-1)/2}.$$

この関係式は

$$\mathcal{S}_2(Nx) = \frac{\left\{\mathcal{S}_2(x)\mathcal{S}_2(x+\frac{1}{N})\cdots\mathcal{S}_2(x+\frac{N-1}{N})\right\}^N}{\mathcal{S}_1(x+\frac{1}{N})^1\cdots\mathcal{S}_1(x+\frac{N-1}{N})^{N-1}}$$

と見やすく書き直すことができる。とくに，次の2倍角の公式が成立する：

$$\mathcal{S}_2(2x) = \frac{\mathcal{S}_2(x)^2\mathcal{S}_2(x+\frac{1}{2})^2}{\mathcal{S}_1(x+\frac{1}{2})}.$$

これを，通常の2倍角の公式 $\mathcal{S}_1(2x) = \mathcal{S}_1(x)\mathcal{S}_1(x+\frac{1}{2})$ と比較すると $\mathcal{S}_2(x+\frac{1}{2})$ は2重コサイン関数ともみなせる。(ただし，別の解釈もある —— 後の $\mathcal{C}_r(x)$。)

⑧は，両辺の対数微分をみて

$$\mathcal{S}_2(x) = C\cdot\exp\left(\frac{\pi i x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\mathcal{L}i_2(1-e^{-2\pi i x})\right)$$

となることがわかり，$x\to 0$ とすると $C=1$ を得る。

なお，⑧は次の形にしておくと "オイラー積表示" としての解釈と一般化がわかりやすい。

$$\mathcal{S}_2(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\mathcal{L}i_2(e^{2\pi i x}) - x\mathcal{L}i_1(e^{2\pi i x}) - \frac{\pi i}{2}x^2 + \frac{\pi i}{12}\right) & \cdots \mathrm{Im}(x)>0 \\ \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\mathcal{L}i_2(e^{-2\pi i x}) - x\mathcal{L}i_1(e^{-2\pi i x}) + \frac{\pi i}{2}x^2 - \frac{\pi i}{12}\right) & \cdots \mathrm{Im}(x)<0. \end{cases}$$

この証明は⑧と独立に，同様に出来るが，⑧とは $\mathcal{L}i_2(x)\leftrightarrow\mathcal{L}i_2(1-x)$ の関係式を通して対応している。

さて、これを一般次数に拡張するには次のようにする。$r \geqq 2$ に対して

r 重サイン関数を

$$\mathcal{S}_r(x)=\exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right)\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}}=\exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(P_r\left(\frac{x}{n}\right)P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{(-1)^{r-1}}\right)^{n^{r-1}},$$

$P_r(x)=(1-x)\exp\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^r}{r}\right)$ と定義する。また、r 重

コサイン関数を

$$\mathcal{C}_r(x) \text{“}=\text{”} \prod_{\substack{n=-\infty \\ \text{odd}}}^{\infty} P_r\left(\frac{x}{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)^{r-1}}$$ とおく。すると $\mathcal{S}_r(x)$ は

1価有理型関数で位数 r であり、r が奇数のときに限り

正則である。たとえば

$$\mathcal{S}_3(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}e^{x^2}$$

となっていて、
$$\mathcal{S}_1(x)=2\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

とよく似ている。ここでの r 重コサイン関数の定義は便宜的なものであるが、$\mathcal{C}_r(x)$ は 2^{r-1} 価の関数であって

$$\mathcal{C}_r(x)^{2^{r-1}}=\frac{\mathcal{S}_r(2x)}{\mathcal{S}_r(x)^{2^{r-1}}}$$

は有理型関数である。この関係式は2倍角の公式

$$\mathcal{S}_r(2x)=\mathcal{S}_r(x)^{2^{r-1}}\mathcal{C}_r(x)^{2^{r-1}}$$

に他ならない。

ここで、$\mathcal{S}_r(x)$ の基本的な性質を挙げよう。

(1)(微分方程式) $\frac{\mathcal{S}_r'}{\mathcal{S}_r}(x)=\pi x^{r-1}\cot(\pi x)$.

なお，

$$\frac{\mathcal{C}_r'}{\mathcal{C}_r}(x) = -\pi x^{r-1}\tan(\pi x) .$$

(1a)（代数的微分方程式）

$\mathcal{S}_r(x)$（および $\mathcal{C}_r(x)$）は，次の２階の（非線型）代数的微分方程式をみたす

$$f''(x) = \left(1-x^{1-r}\right)\frac{f'(x)^2}{f(x)} + \frac{r-1}{x}f'(x) - \pi^2 x^{r-1} f(x).$$

これは $r=1$ のときには $f''(x) = -\pi^2 f(x)$ という $\begin{cases} \mathcal{S}_1(x)=2\sin(\pi x) \\ \mathcal{C}_1(x)=2\cos(\pi x) \end{cases}$ のみたす通常の（線型）微分方程式である。

(2)（積分表示）

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1}\cot(\pi t)\,dt\right),$$

ただし $\int_0^x \subset \mathbb{C}-\{\pm1, \pm2, \cdots\}$.

(3)（周期性）

$$\mathcal{S}_r(x+1) = \mathcal{S}_r(x) \times (\text{lower order}).$$

この（lower order）のところは，詳しくは

$$(\text{lower order}) = -\exp\left(-2\sum_{\substack{1<l<r \\ \text{odd}}}\binom{r-1}{l-1}\zeta'(1-l)\right)\prod_{k=1}^{r-1}\mathcal{S}_k(x)^{\binom{r-1}{k-1}}.$$

ただし，$\zeta(s)$ はリーマン・ゼータ関数。

(4)（倍角公式）

$$\mathcal{S}_r(Nx) = \left\{\mathcal{S}_r(x)\mathcal{S}_r\left(x+\frac{1}{N}\right)\cdots\mathcal{S}_r\left(x+\frac{N-1}{N}\right)\right\}^{N^{r-1}} \times (\text{lower order}).$$

この（lower order）も明示できるが略する。

(5) （"オイラー積表示"）

$$\mathcal{S}_r(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{(r-1)!}{(-2\pi i)^{r-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\dfrac{(-2\pi i)^k}{k!}x^k \mathcal{L}i_{r-k}\left(e^{2\pi i x}\right)-\dfrac{\pi i}{r}x^r+\dfrac{(r-1)!}{(-2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\ \mathrm{Im}(x)>0 \\ \exp\left(-\dfrac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\dfrac{(2\pi i)^k}{k!}x^k \mathcal{L}i_{r-k}\left(e^{-2\pi i x}\right)+\dfrac{\pi i}{r}x^r+\dfrac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}}\zeta(r)\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\ \mathrm{Im}(x)<0.\end{cases}$$

(6) （多重ガンマ関数との関連）

$$G_r(x)=\exp\left(\frac{(-1)^r x^{r-1}}{2(r-1)}\right)\prod_{n=1}^{\infty}P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{-n^{r-1}}$$

は バーンズ[2c]の多重ガンマ関数の簡単化されたものであり，

$$\mathcal{S}_r(x)=G_r(x)^{(-1)^r}G_r(-x)^{-1}$$

が成立する。これは $r=1$ のときは，有名なオイラーの関係式であり，$r=2$ のときは バーンズ[2]が注意した。なお，同所でバーンズはヘルダー[1]を明確に引用しているので，バーンズの基本的な論文[2]を読んだ場合（その数は少なくないはずであり，ハーディ，リトルウッド，スペンサー，新谷，ヴィネラ，ヴォロス，サルナックは引用しているし，バーンズ[2]の論文"G-function"はホイタッカー＋ワトソンの有名な解析の教科書に例題として基本的な性質が文献も引用して書かれている）ヘルダーの結果は目にするが，何故，多重サイン関数の概念が捉えられなかったのか，また，何故，バーンズ[2]以外ではヘルダー[1]（1886）が引用されていないのか（少なくとも筆者の見た範囲ではそうである），不思議である。

これらの結果の証明は，すでに見た $r=2$ の場合のヘルダーの方法を自然に拡張して得られる。（難しいのは定義をどうすればよいか，という点である。）詳しくは黒川[5][5a][5b]を参照。

応用を2つ記しておく。

応用1　$\zeta(x)$ やディリクレL関数 $L(s,\chi)$ の特殊値 $L(r,\chi)$ は有理数 x に対する $\mathcal{S}_k(x)$ $(k\leq r)$ を用いて表示できる。

例：
$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\pi^2\log\left(\frac{2^{1/4}}{\mathcal{S}_3(\frac{1}{2})}\right),$$
$$\zeta(5)=\frac{32\pi^4}{93}\log\left(\frac{\mathcal{S}_5(\frac{1}{2})\,2^{11/112}}{\mathcal{S}_3(\frac{1}{2})^{9/14}}\right),$$
$$\cdots。$$

これらは $\mathcal{S}_r(x)$ の性質(5)（"オイラー積表示"）から導かれる。このうち $\zeta(3)$ の式はオイラー（1772年；全集I-15巻，p.150）の式
$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots=\frac{\pi^2}{4}\log 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\, d\varphi \log(\sin\varphi)$$
と同値である（簡単に変形できる）。一般形は黒川[5][5b]。

応用2　階数1の任意の局所対称空間 $M=\Gamma\backslash G/K$ のセルバーグゼータ関数 $Z_M(s)$ のガンマ因子 $\Gamma_M(s)$ が $\mathcal{S}_r(x)$ を用いて計算でき（$\mathcal{S}_r(x)$ の微分方程式(1)が重要である），したがって多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x)$ によって表示される。同時に行列式表示
$\det\left(\sqrt{\Delta_{M'}+\rho_0^2}+(s-\rho_0)\right)^{vol(M)}$ をもつことがわかる。ここで，M' は

コンパクト双対対称空間 ($M'=G'/K$), $\Delta_{M'}$ はそのラプラス作用素, ρ_0 は正の定数, vol(M) は M の正規化された体積。デニンジャー[6a]の結果と合わせると, 今のところ知られているすべてのオイラー積型のゼータ関数(数論的ゼータ関数とセルバーグ型ゼータ関数)のガンマ因子ーミトコンドリアーは自然な作用素による行列式表示をもつことになり, 哲学的に興味深い。詳細は黒川[5][5b]。

§3. 新谷型の一般周期の多重サイン関数

ヘルダーの導入した多重サイン関数は構成の簡明さから親しみやすいものであるが, 次数が高くなるにつれて, 周期性や倍角公式などにおいて "lower order" の寄与が簡明でなくなる欠点がある。この事情を明らかにするためには一般周期の多重サイン関数を導入し, 先の "素朴な" 多重サイン関数を分解するとよい。この型の多重サイン関数は次数2のときに新谷[3]が導入した。いま, "周期" $\omega_1, \cdots, \omega_r$ (任意の複素数でよいが, 簡単には $\omega_i>0$ から出発するとわかりやすい) を考え $\underline{\omega}=(\omega_1, \cdots, \omega_r)$ とする。まず, r重ガンマ関数を

$$\Gamma_r(x,\underline{\omega})=\Big[\prod_{\underline{n}\geq\underline{0}}(\underline{n}\cdot\underline{\omega}+x)\Big]^{-1}=\exp\big(\zeta_r'(0,x,\underline{\omega})\big)=\det(D_{\underline{\omega}}+x)^{-1}$$

とおく。ここで $\prod\limits_{\underline{n}\geq\underline{0}}$ は§1で定義された, ゼータ正規化された無限積であり $\underline{n}=(n_1,\cdots,n_r)$ は $n_i=0,1,2,\cdots$ を動き, $\underline{n}\cdot\underline{\omega}=n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r$. また,

$$\zeta_r(s,x,\underline{\omega})=\sum_{\underline{n}\geq\underline{0}}(\underline{n}\cdot\underline{\omega}+x)^{-s}$$ はr重フルビッツゼータ関数であり,

$D_{\underline{\omega}}=\omega_1 t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots+\omega_r t_r\frac{\partial}{\partial t_r}$ は多項式環 $\mathbb{C}[t_1,\cdots,t_r]$ に作用する微分作用素である。

さらに, r重サイン関数を

$$\mathcal{S}_r(x,\underline{\omega})=\Gamma_r(x,\underline{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\underline{\omega}|-x,\underline{\omega})^{(-1)^r}=\Big[\prod_{\underline{n}\geq\underline{0}}(\underline{n}\cdot\underline{\omega}+x)\Big]\Big[\prod_{\underline{n}\geq\underline{1}}(\underline{n}\cdot\underline{\omega}-x)\Big]^{(-1)^{r-1}}$$

とおく。ここで $|\underline{\omega}|=\omega_1+\cdots+\omega_r$。とくに $\underline{\omega}=(1,\cdots,1)$ のときには $\Gamma_r(x,\underline{\omega}), S_r(x,\underline{\omega})$ を $\Gamma_r(x), S_r(x)$ と書く。簡単な計算にて $\Gamma_1=\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$, $S_1(x)=\frac{1}{\Gamma_1(x)\Gamma_1(1-x)}=2\sin(\pi x)=\mathcal{S}_1(x)$ がわかる。$S_r(x)$ に関しては次の基本的な結果を得る。

定理

(1) $$\mathcal{S}_r(x)=\prod_{k=1}^{r} S_k(x)^{c(r,k)}\times\begin{cases} e^{2\zeta'(1-r)} & \cdots\ r\geqq 3,\ \mathrm{odd}\\ 1 & \cdots\ \text{その他}\end{cases},$$

$c(r,k)=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}l^r$ は整数。

(2) $$\frac{S_r'}{S_r}(x)=(-1)^{r-1}\binom{x-1}{r-1}\pi\cot(\pi x)。$$

この証明は，かなり長いので省略し，黒川[5b]を参照せざるを得ない。(困難な理由は $S_r(x)$ は多重ガンマ関数を用いて構成されており，微分方程式とは結びつきにくい点にある――多重ガンマ関数は，通常のガンマ関数と同様，代数的微分方程式をみたさない。なお，このガンマ関数の微分超越性はヘルダーの有名な結果であり，多重版はバーンズによる。) セルバーグゼータ関数のガンマ因子の計算には，この定理が必要である。

一般周期の場合 $S_r(x,\underline{\omega})$ の基本的な性質は次のように簡明である。

(1) (周期性) $$S_r(x+\omega_i,\underline{\omega})=S_r(x,\underline{\omega})S_{r-1}(x,\underline{\omega}(i))^{-1}.$$

ただし，$\underline{\omega}(i)=(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\cdots,\omega_r)$。

(2) (倍角公式) $$S_r(Nx,\underline{\omega})=\prod_{\substack{k_i=0\\ i=1,\cdots,r}}^{N-1} S_r\left(x+\frac{\underline{k}\cdot\underline{\omega}}{N},\underline{\omega}\right).$$

ただし，$N=1,2,3,\cdots$。とくに，$x\to 0$ とすると

$$\prod_{\substack{k_i=0\\ i=1,\cdots,r\\ \underline{k}\neq\underline{0}}}^{N-1} S_r\left(\frac{\underline{k}\cdot\underline{\omega}}{N},\underline{\omega}\right)=N$$

を得る。

(3) (同次性) $c>0$ に対して $$S_r(cx,c\underline{\omega})=S_r(x,\underline{\omega}).$$

これらの証明には，まず$\zeta_r(s,x,\underline{\omega})$の対応する性質を示すことが必要である。

(1) $\zeta_r(s, x+\omega_i, \underline{\omega}) = \zeta_r(s, x, \underline{\omega}) - \zeta_{r-1}(s, x, \underline{\omega}(i))$.

(2) $$\zeta_r(s, Nx, \underline{\omega}) = N^{-s}\sum_{\substack{k_i=0\\ i=1,\ldots,r}}^{N-1} \zeta_r\left(s, x+\frac{k\cdot\underline{\omega}}{N}, \underline{\omega}\right).$$

(3) $\zeta_r(s, cx, c\underline{\omega}) = c^{-s}\zeta_r(s, x, \underline{\omega})$.

さらに，　$x \longleftrightarrow |\underline{\omega}|-x$ の双対性（安藤昌益の"互性"）と

$$\zeta_r(0, x, \underline{\omega}) + (-1)^{r-1}\zeta_r(0, |\underline{\omega}|-x, \underline{\omega}) = 0$$

に注意すればよい。詳細は黒川[5b]。

この多重サイン関数$S_r(x,\underline{\omega})$は$r=2$の場合に新谷[3]によって実2次体の類体の構成を目指して詳しく研究された（残念ながら$F(x;\omega_1,\omega_2)$という記号しか使われておらず，2重サイン関数という呼び方はされなかった）が，これに関しては『数学』第29巻（1977）における解説（[3a]）およびヘルシンキ数学者会議における報告（[3b]）を読まれるのが最良であるので，次の印象的な数値例を引用するに止める：

$\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ の基本単数 $\varepsilon = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ に対して

$$S_2\left(\frac{1}{3}, (1,\varepsilon)\right) S_2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}, (1,\varepsilon)\right) S_2\left(\frac{2+2\varepsilon}{3}, (1,\varepsilon)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{21}}{2}+\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}}{2}}\ .$$

一般の多重サイン関数の場合も含めて，特殊値の代数性は重大な問題であるが，現在まで神秘的な問題として残されている。これは別の見方をすれば，スターク予想（[4]）の代数性とも実質的に同等である。

この問題に関しても1980年代を通して進歩がない。多重サイン関数に対する加法公式および倍角公式をより深く研究することは一つの方向であろう。参考のため，次節の多重ゼータ関数の考え方から導かれる $S_2(x,\underline{\omega})$ の"オイラー積表示"（$Im(x)>0$）を記しておこう：

$$S_2(x,(\omega_1,\omega_2)) = \exp\Bigg(\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cot\left(\pi m\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)e^{2\pi i m\frac{x}{\omega_1}} + \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cot\left(\pi n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)e^{2\pi i n\frac{x}{\omega_2}} + \frac{1}{2}\log\left(1-e^{2\pi i\frac{x}{\omega_1}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1-e^{2\pi i\frac{x}{\omega_2}}\right) + \frac{\pi i}{2\omega_1\omega_2}x^2 - \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)x + \frac{\pi i}{12}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}+3\right)\Bigg).$$

§4. 多重ゼータ関数

Spec $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム X のハッセ・ヴェイユ ゼータ関数は $\zeta_X(s)=\prod_{x\in|X|}(1-N(x)^{-s})^{-1}$ である。$|X|=\{X\text{の閉点}\}$ であり $N(x)=\#(\mathcal{O}_{X,x}/(max.ideal))$ はノルムである。X が有限体上のスキームのときには $X\times X$，$X\times X\times X\times\cdots$ はその次元が X の次元の2倍，3倍，…となって，幾何的扱いが可能である。これがドリーニュによるヴェイユ予想の証明の最も基本的な鍵であった。つまり，いま，ρ が $\zeta_X(s)$ の"n次元"（あるいは"重さn"）の零点・極（$\zeta_X(\rho)=0,\infty$）とするとグロタンディエクによる行列式表示により $\zeta_{\underbrace{X\times\cdots\times X}_{m}}(m\rho)=0,\infty$ がわかる。これに，一般的な評価式 $-\frac{1}{2}\leq Re(m\rho)-\frac{nm}{2}\leq\frac{1}{2}$（これは $\zeta(s)$ のときに自明でない零点は $0\leq Re(s)\leq 1$ のみにある，ということに対応する）を用いることにより $-\frac{1}{2m}\leq Re(\rho)-\frac{n}{2}\leq\frac{1}{2m}$ が $m=1,2,\cdots$ に対して成立する。したがって $Re(\rho)=\frac{n}{2}$ を得る。

この証明法をリーマンゼータ関数などの場合に拡張するには，まず，Spec $\mathbb{Z}$ × Spec $\mathbb{Z}$，Spec $\mathbb{Z}$ × Spec $\mathbb{Z}$ × Spec $\mathbb{Z}$，… およびそれらのゼータ関数を"高次元"のものとして構成する必要がある。通常のスキーム論的にはこれらはすべて Spec $\mathbb{Z}$ になってしまい，何の効果もない。これを打破する一方法が多重圏を用いる多重ゼータ関数論である。（この方法は，まず，黒川[5c]（1984）で指摘された。）ここには，紙数がつまってきており，詳細に触れる余裕はないので多重サイン関数（とくにその"オイラー積表示"）がより見通しやすくなることのみを注意したい。

いま、ゼータ関数 $Z_i(s)=\prod_{\rho\in\mathbb{C}}(s-\rho)^{m_i(\rho)}$, $m_i:\mathbb{C}\to\mathbb{Z}$, が与えられているとき "積"

$$Z_1(s)\otimes\cdots\otimes Z_r(s)=\prod_{\rho_1,\dots,\rho_r\in\mathbb{C}}\left(s-(\rho_1+\cdots+\rho_r)\right)^{m(\rho_1,\dots,\rho_r)}$$

を $m(\rho_1,\dots,\rho_r)=m_1(\rho_1)\cdots m_r(\rho_r)\times\begin{cases}1 & \cdots\text{すべて } \mathrm{Im}(\rho_i)\geqq 0\\ (-1)^{r-1} & \cdots\text{すべて } \mathrm{Im}(\rho_i)<0\\ 0 & \cdots\text{その他}\end{cases}$, と定義する。この符号条件が重要である。

多重(双曲型)サイン関数はこの一例である。$Z_i(s)$が"オイラー積" $\exp\left(\sum_{N_i>0} a_i(N_i)N_i^{-s}\right)$ をもっているとすると $Z_1(s)\otimes\cdots\otimes Z_r(s)$ は再び"オイラー積" $\exp\left(\sum_{N>0} a(N)N^{-s}\right)$ をもつことがわかる。§2, §3で用いられた $\mathcal{S}_r(x)$, $S_r(x,\underline{\omega})$ の"オイラー積"表示は、この特別な場合である。

§5. q類似

q類似についても余裕がないので黒川[56]を参照されたい。次の図式を注意しておきたい。

楕円曲線	通常の表示 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ で	テイト表示 $\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$
付随する "サイン関数"	σ-関数 (ϑ_1-関数)	$\sin_q(x)$

実質的には $\sigma\cong\sin_q(x)$ であるが、その加法公式などは $\sin_q(x)$ の方がより簡明に書ける。多重サイン関数の場合もq類似がある: $S_r^q(x,\underline{\omega})$。このq類似を用いることによりサイン関数の楕円関数論・アーベル関数論的拡張の方向とヘルダー・新谷型の多重サイン関数の拡張の方向との統一的描像が得られる。

[1991.11.17]

文献

[1] O. Hölder: "Ueber eine transcendente Function" Göttingen Nachrichten (1886) pp. 514–522. [巻数は付けられていない。]

[2] E. W. Barnes: "The theory of the G-function" Quart. J. Math. 31 (1900) 264–314.

[2a] —: "The theory of the double gamma function" Philos. Trans. Royal Soc. (A) 196 (1901) 265–388.

[2b] —: "On the theory of the multiple gamma function" Trans. Cambridge Philo. Soc. 19 (1904) 374–425.

[3] 新谷: "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977) 167–199.

[3a] —: "代数体のL-函数の特殊値について" 『数学』 29 (1977) 204–216.

[3b] —: "On special values of zeta functions of totally real algebraic number fields" Proc. Helsinki ICM 1978 pp. 591–597.

[3c] —: "A proof of the classical Kronecker limit formula" Tokyo J. Math. 3 (1980) 191–199.

[4] H. M. Stark: "L-functions at s=1 (IV)" Adv. Math. 35 (1980) 197–235.

[5] 黒川: "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61–64.

[5a] —: "Multiple zeta functions: an example" Adv. Studies in Pure Math. 21 (Proc. of "Zeta Functions in Geometry" Tokyo 1990 Aug.)

[5b] —: "多重サイン関数講義" 1991年4月–7月, 東京大学理学部。

[5c] —: "On some Euler products I" Proc. Japan Acad. 60A (1984) 335–338.

[6] C. Deninger: "Local factors of L-functions of motives" (preprint 1991)

[6a] —: "On the Γ-factors attached to motives" Invent. Math. 104 (1991) 245–261