１９世紀における論証的規範の転換
――Lacroix を case study として――

津田塾大学　Ｍ２　　水谷　由美

§１　はじめに

18世紀は、Newton(1643-1727)や Leibniz(1646-1716)の微積分法の発見を機に、解析的手法に基づく数学の新しい分野が非常に発展した時期であった。しかし、実り豊かな結果が次々と生み出されたにもかかわらず、この時代の数学は厳密なものではなかったとしばしば言われる。確かに Cauchy(1789-1857)やWeierstrass(1815-97)以降の基準で見れば、微積分学の基礎概念はしっかり確立されてはいなかった。けれども、これまで数学史が注目してこなかった資料を研究していくと、18世紀の数学者達が論理的な精神を忘れ、問題を解くことに埋没していたわけではないことが次第に明らかになる。

18世紀ヨーロッパでは、大学は数学の中心ではなく、数学者の多くは王室や貴族の庇護のもとに研究を続けていた。しかし、フランス革命後はそのような庇護を失う。一方、革命政府は、科学教育が国家の利益になるとの考えから、École Polytechnique を始めとする、中産階級の子弟のための学校を設立した。このような社会情勢の変化に伴い、数学者は大学で数学を教授するという新たな仕事に就くことになったのである。それと同時に、学生のための教科書の執筆・編纂が、大きな仕事として出現することになった。

Sylvestre François Lacroix(1765-1843) はそういう時代の数学者の一人である。18世紀の解析的手法の論理的体系化を試み、解析学のあらゆる結果を集大成した教科書を編纂したのであった。18世紀的数学の総合を成し遂げただけではなく、新たな厳密化を受ける19世紀の数学方法上の大変革への黎明期に位置する数学者である。

そこで、Lacroixの主著 <u>Traité du calcul différentiel et du</u>

calcul intégral を取り上げ、 Eulerの提起した数学が半世紀後にはどのように総括されたか、 またEulerとは違う基礎づけへの意識を見ていく。

§2 解析学の基礎づけに対する意識

Lacroix は、19世紀初頭には多くの優れた教科書で影響を持つ数学者であった。以下に Lacroixの書いた教科書のリストを載せる。初版年と共に、版を重ねたものについては最後の出版年、翻訳されたものについては最初の出版年を挙げたので、当時いかに人気があったか分かるだろう。

1. Essai de géométrie sur les plans et les surfaces (Paris, 1795; 7th ed., 1840), also in Dutch trans. (1821).
2. Traié élémentaire d'arithemétique (Paris, 1797; 20th ed., 1848), also in English trans. (Boston, 1818) and Italian trans. (Bologna, 1822).
3. Traité élémentaire de trigonométirie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre a la géométrie (Paris, 1798; 11th ed., 1863), also in English trans. (Cambridge, Mass., 1820) and German trans. (Berlin, 1805).
4. Élémens de géométrie (Paris, 1799; 19th ed., 1874).
5. Complément des élémens d'algèbre (Paris, 1800; 7th ed., 1863).
6. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 3 vols. (Paris, 1797-1800, in the 1st ed., vol.3 was published under the title Traité des différences

et des séries; 2nd ed., 1810-19).

7. Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral (Paris, 1802; 9th ed., 1881), also in English trans. (Cambridge, 1816) and German trans. (Berlin, 1830-31).
8. Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier, ou manière d'étudier et d'enseigner les mathématiques (Paris, 1805; 4th ed., 1838).
9. Introduction à la géographie mathématique et physique (Paris, 1811).
10. Traité élémentaire du calcul des probabilités (Paris, 1816).
11. Introduction à la connaissance de la sphère (Paris, 1828).

このうち、7 番目に挙げた Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral が、解析協会 (Analytical Society)のメンバーであった、C.Babbage(1792-1871)、J.Herschel (1792-1871)、G.Peacock(1791-1858) によって英訳されていることは、注目すべきことである。当時のイギリス数学は大陸数学に遅れをとっており、彼らは、Newtonの流率法にかわって、 Leibniz流の記号法を普及させ、大陸で進行中であった新しい数学を取り入れたいという目的で、Lacroixの教科書を翻訳したのである。 この翻訳教科書は、最初の 1 カ月で 200 部が売れてしまったという。[1)]

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral （以下 Traité du calcul と略す）は、3 巻よりなっている。 微分法を扱っている第 1 巻は1797年に、積分法を扱っている第 2 巻は1798年に出版され、差分法と級数を扱っている第 3 巻にあたる本は

Traité des différences et des séries のタイトルで 1800年に出版された。差分法と級数を別の巻として出版したことについては、Traité du calcul の preface の中で、“関数の級数展開は、微分法に通じている。 積分法は、 級数によってしか表現できないような新しい関数を知らしめる。この級数についての考察が有限差分法を生むのである。それが、微分法から差分法を切り離した理由である。”と説明している。[2)]

この教科書には27ページに及ぶ長い preface があり、Lacroixのこの本にかける意気込みが感じられる。 その preface の冒頭で、教科書を書く必要性を次のように述べている。[3)]

> 科学の初歩が不完全なとき、それを学ぶ人々は自分に不足している概念を得るために、読まなくてはいけない本の多さに意欲をそがれて、不安を抱いて、用語を少しも知らない道へ入っていくしかない。数学はすべての科学の中でも、初歩の本において展開や進歩が記されていないような分野であろう。

初学者がきちんと微積分を学べる教科書を作ろうとしたのだった。Lacroixはこの教科書の縮刷版と言える Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral（以下 Traité élémentaire du calcul と略す）を、 École Polytechnique の授業で用いていた。

Lacroixは この Traité du calcul を書こうと思った動機について、“無限小の概念の代わりの明解な概念を基礎としているLagrangeの論文を読んだことで、私は微積分の取り扱いに専念したいと思うようになった。”と書いており、[4)] 無限の概念から独立した微積分の基礎を与えようとしていたことが分かる。実際、序章を設けて級数展開の解説に充てており、微分の原理として、Lagrange流の級数展開に基づいた方法を採用している。しかし同時

に、級数展開に基づく方法（Lagrange）、極限の方法（d'Alembert）、無限小の方法（Euler）を比較し、それらが同値なものであると述べ、一旦正当化された後では、その場に応じて使いやすい方法を使ってよいと述べている。[5]

> 私は様々な観点で、曲線と曲面の理論への微分法の応用を表現した。どんな無限の概念も表立っては取り入れていないのが、Lagrangeによるものである。Arbogastも独自にそれに達した。Newtonは Principia の中でほとんどそれに達していたし、Maclaurinも Traité des fluxions の第 2 章で、極大、極小、変曲点を取り扱いながら、さらにそれに近づいていた。私は次に、極限の方法を与えたが、Taylorの定理の方法によって、私が新しいと思う方法を付け加えた。最後に、私は無限小の考察を利用した。この 3 つの方法を比較して、これらの方法は表現が違うだけなのだということを、注意深い読者に証明する。そして、それが十分説明されたときには、最後の無限小の方法が、新しい方程式を解くために与える簡便さや、Monge の二重曲率に対する曲線の理論が注目すべき例を与えるところの簡便さゆえに、貴重だと考えるだろう。

さらに、この Traité du calcul では、Lagrangeの微分法を第一原理として採用しているのに、Traité élémentaire du calcul では、d'Alembertの方法を第一原理としていることからも、Lacroix がその二つの方法を全く同値と見なしていたことが伺える。Analytical Society のメンバーによる英訳の序文で、翻訳者は“この教科書[6]は Lacroixの偉大な著書[7]の縮刷版と見なされるかもしれないが、第一原理の証明において、彼は最初に採用した、より正しく自然であるLagrangeの方法の代わりに、d'Alembertの極限の方法を置き換えている。”と注意している。[8]

Lacroixはこの教科書を書くにあたり、Euler、d'Alembert、Lagrangeを始めとする多くの数学者の文献を参考にしており、目次の中の項目毎に、引用・参考文献を列挙している。 また、prefaceの中では次のように述べている。[9]

> 論文の中に散在していた数多くの微積分学 (Calcul différentiel et Calcul intégral) の材料を統合することで、解析学(Analyse)のこの重要な分野の豊かさを知らしめることが可能になった。

これは Lacroixの基礎づけに対する特徴的な姿勢を示している。混在する微積分のすべての方法の中から一つを取り上げようというのではなく、それらすべてを'和解'させる方向で、基礎づけを試みようとしたのである。この姿勢は、代数的形式主義－－代数的規則の一般性を無条件に信頼するという18世紀特有の精神－－の枠組みの中で合理的な解釈を与え、矛盾を解決するという基礎づけを試みた Eulerとの大きな違いである。この'和解'から体系化への歩みが、新たな19世紀数学の規範を形成していくことになるのである。

§3 Lacroixの論証的規範

Lacroix が'和解'によって打ち出した新しい厳密化の方向は、どのようなものであったのか。

まず、 Lacroixは微積分の中のどの要素を取り上げ、どう構成したのか。 <u>Traité du calcul</u> の目次を見ると、次のようになっている。[10]

第 1 巻　序　章 ：関数と級数に関する一般の概念
　　　　第 1 章：微分の原理と解析的説明
　　　　第 2 章：微分法の主な解析的用法

第 3 章：代数方程式に関する話
第 4 章：曲線の理論
第 5 章：曲面と二重曲率の曲線の理論

第 2 巻　第 1 章：一変数関数の積分
第 2 章：曲線の求積と修正、曲面の求積と曲面が含む立体の計算への積分の応用
第 3 章：二変数の微分方程式の積分
第 4 章：二変数或はそれ以上の変数の関数の積分
第 5 章：変分法

第 3 巻　第 1 章：差分法
第 2 章：生成関数の考察から起こる級数の理論
第 3 章：級数の理論への積分の応用
第 4 章：種々の差分方程式

これを Eulerの Institutiones calculi differentialis （以下 Institutiones と略す）と比べてみると、Lacroixは関数の級数展開を最初に説明しているのに対し、Eulerは差分法から入っている。これはEulerが微分を差分の特別な場合として理解していたからで、実際 Institutiones の§3で “関数 y の増分Δy を差分と呼ぶ” と定義し、[11] §114で “無限小の差分を微分と呼ぶ” と定義している。[12]

Lacroixは、序章で代数関数、指数・対数関数、三角関数の級数展開について述べたあと、最後に

> 関数の級数展開を取り扱ったこの章の中で、私達はより簡単でより実り多い方法で、その研究を終えた。序章の目的は、読者に級数の考察と慣れ親しんでもらうことと、この後の章への準備であった。次章では、関数の級数展開から微分法が導かれる。これは、Mémoires de l'Académie de Berlin (1772) の中で、

Lagrangeが初めて知らしめた、最も明晰かつ最も直接的な展開である。

と書いており、[13] 微分が関数の級数展開から導かれることを改めて強調している。

この級数展開による定義が、d'Alembertの極限の方法と一致することを、 微分法の原理を説明している第 1 章の最後の方の§92で証明している。[14] さらに、§97で Leibnizの方法にも触れている。そのLeibnizの方法は、“Lagrange やd'Alembertのものほど厳密ではないが、応用には便利である”と述べている。[15] 続いて、xy の微分を求める方法を示し、“代数関数の微分の求め方は xy の場合に帰着されるが、超越関数の場合には、無限小の増分を仮定することが非常に難しくなる。たとえば、三角関数では、弧をその正弦と、余弦を半径と同一視してよい。”と説明している。[16]

つぎに、関数概念についてEulerと比較しながら見ていく。Eulerは、<u>Calculus differentialis</u> (1727?)の中で、

Quantitas quomodocunque ex una vel pluribus quantitatibus composita appelatur ejus vel plurium functio.

1 つあるいはそれ以上個数の量からどのような方法であれ構成される量を、それのあるいはそれらの量の関数という。

と定義している。 この <u>Calculus differentialis</u> は未出版の手稿であり、いつ書かれたか定かではないが、A.P.Yushkevichによると1727年頃と推定されている。ペテルスブルグ・アカデミーの学生達に教えるために書かれたらしい。[17] 1727年に書かれたとすればEulerが20歳のときで、 微積分学の教科書としては最初に書かれたものだと考えられる。 このEulerの関数の定義は本質的にはJohann Bernoulliのものと同じであるが、Eulerは、議論している変数の性

質については何も言っていないという点が異なっている。

つぎに、Introductio (1748)では、変数と定数の違いを説明したあと、

> Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabilis et numeris seu quantitatibus constatibus.
> 一変数関数とは、その変数と数すなわち定数とから、いかなる方法であれ構成される解析的表現のことである。

と定義している。[18] Calculus differentialis と異なるのは、quantitas （量）という言葉を、expressio analytica （解析的表現）としている点である。

さらに、Institutiones (1755)では、

> Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appelari solent; quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent seu per eam determinatur, eius functiones vocatur.
> もしある量が他の量に、もし後者が変化するなら前者も変化するというように依存しているなら、前者は後者の関数と呼ばれる。この名称はもっとも広い種類のものであり、それによって1つの量が他のものによって決まることのできるあらゆる方法を含んでいる。 そして、もし x がを変量を示しているなら、どんな仕方でも x に依存しているすべての量や x から決定されるようなすべての量はその関数と呼ばれる。

と定義している。[19]

定義だけを追うと、年代を追うごとにより一般的なものへと変わっていっており、 Euler自身、解析学の柱である関数概念を精密化することに、早い時期から関心をもっていたことが伺える。しかし実際には、Eulerはこのような依存関係で定義される関数もすべて、級数展開することで解析的式で表現できると考えていた。

では、Lacroixはどうであろうか。Traité du calcul の序章で次のように定義している。[20]

> 昔の解析学者達は、 一般に 1 つの量の関数という名称のもとに、この量のすべての巾を理解していた。後に、この言葉の意味は、様々な代数的演算の結果に適するように拡張された。このようにして、再び、和、積、商、巾、根のなんらかの方法によって含まれる代数的表現を、1 つあるいは複数の量の関数と呼ぶようになった。解析学の進歩によりもたらされた新しい概念によって、結局つぎの関数の定義を与える：
>
> Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sachè ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.
> その値が 1 つまたは 複数の他の量に依存するようなすべての量は、後者から前者に至るのにどんな演算を用いる必要があるのか知っていようがいまいが、これらの後者の関数と呼ぶ。

この定義は、前述のEulerのものを思い出させる。 しかし、陽関数、陰関数という言葉を定義したあと、さらに次のような説明が加えられている。[21]

> いくつかの量の間の方程式があるということは、それらの量の

うちの 1 つが他の量の陰関数であることの、 必要条件ではない。その値が、それらの特定の値に依存することがわかれば十分である。 たとえば、円では、たとえ代数解析がこの 2 つの量の関係を説明する方法を提示できなくても、正弦は弧の陰関数である。なぜなら、相互に、一方が決定されると他方が決定されるからである。

依存関係を演算によって表現できないときでも関数を定義すると明記しており、対応としての関数概念に近づいていると言えるだろう。

微分法の原理、関数概念、について見てきたが、 Lacroixが与えた定義は、現存する微積分の結果を包括し、解析学の基礎概念として役立つようなものにするという方向で、以前の定義よりも拡張されたものになっていることが分かる。 これは、前節で述べた、Lacroixの基礎づけに対する姿勢 ーー‘和解’によって解析学を体系化しようという姿勢 ーーを裏付けるものであろう。

[Notes]

1) K.Katz, The Impact of the Analytical Society on the Mathematics in England in the First Half of the Nineteenth Century, New York Univ. Ph.D Thesis, 1982, p.41.
2) S.F.Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 1st ed., 1797, Paris, vol.1, p.xxvii.
3) ibid., p.iii.
4) ibid., pp.xxiii-xxiv.
5) ibid., p.xxvi.

6) Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus を指す。
7) Traité du calcul différentiel et du calcul intégral を指す。
8) S.F.Lacroix, Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus, translated from the French into the English by Babagge, Peacock, and Herschel, 1816, Cambridge, p.iii.
9) S.F.Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 1st ed., vol.1, p.xxx-xxxi.
10) ibid., pp.xxx-xxxii.
11) L.Euler, Opera omnia, ser.1, vol.10, p.16.
12) ibid., p.84.
13) S.F.Lacroix, op.cit., pp.79-80.
14) ibid., p.189.
15) ibid., p.193.
16) ibid., pp.193-194.
17) A.P.Yushkevich, L.Euler's Unpublished Manuscript Calculus differentialis, in Leonhard Euler, 1707-1783: Beiträge zu Leben und Werke, Gedankenband des Kantons Baselstadt, Birkhäuser, 1983, Basel, pp.161-170.
18) L.Euler, Opera omnia, ser.1, vol.8, p.18.
19) L.Euler, Opera omnia, ser.1, vol.10, p.4.
20) S.F.Lacroix, op.cit., p.1.
21) ibid., p.1.