数学史における本質的連鎖と論理的連鎖をめぐる一考察――多変数関数論と虚数乗法論からの二つの例――

高瀬 正仁（九大理）

はじめに

数学諸理論の形成過程において、論理的連鎖と本質的連鎖の相違を正確に認識することは、数学史理解のうえで不可欠の作業であろうと私は思う。一般に両者は分かちがたく融合して姿を現わすが、数学史の重要な諸局面において、これらの二つの連鎖の決定的な乖離現象が観察されることもある。そのような場合、我々はしばしば理論の論理的展開の鮮やかさのみに目を奪われて、全理論の根底に横たわるものを見失ってしまいがちである。そこでここでは多変数関数論と虚数乗法論に範例を求めつつ、論理的連鎖の究明だけでは捕捉しきれない本質的連鎖の存在とその重要性を指摘したいと思う。

1. 多変数関数論におけるハルトークスの逆問題の提示

とその解決―ハルトークス、E.E.レヴィ、岡潔―

多変数関数論の基幹線をなす岡潔の理論は九篇の論文から成る連作「多変数解析関数について」の中で展開されたが、この理論の終始変わらぬ目標は、ハルトークスの逆問題を提示して、それを可能な限り一般的な状勢のもとで解決することであった。実際、岡潔はまず第六論文「擬凸状領域」(1942年)において、複素二変数の空間内の単葉領域に対してこの問題を解決し、次いで第九論文「内分岐点をもたない有限領域」(1953年)において、この結果を標題で言われている領域へと押し拡げた。そうしてさらに進んで一般に内分岐点をもつ領域をも視圏にとらえようとしたときに、越えがたい壁に行く手を阻まれて、岡潔の歩みは歩みを止めたのであった。

私は多変数関数論の数学史的研究を通じて、ハルトークスの逆問題の提示とその解決こそは岡潔の理論の核心であるという確信を抱くに至ったが、この簡明な認識を獲得するためには、幾分込み入った状勢を整理して二つの大きな疑問を解決しなければならなかった。まず初めに心に掛かって離れなかったのは、ハルトークスの逆問

題という名称である。これは岡潔自身が使用しているものであり、その岡潔はといえばこの問題を解決した当の本人である。どこにも問題はないとしか思われないが、意外にもこの名称を用いているのは岡潔のみであり、岡潔のいうハルトークスの逆問題、すなわち「擬凸状領域は正則領域であろうか」という問題は、一般的にはレヴィの問題として知られている。そうして岡潔は、E.E.レヴィが端緒を開いて以来の未解決の難問、レヴィの問題の解決者として名高かったのであった。では、この謎めいた状勢のよって来たる所は何であろうか。これが第一の疑問である。

第一の疑問に続いて私を苦しめたのは、ハルトークスの逆問題もしくはレヴィの問題の出処をめぐる問いである。岡潔自身はこんなふうに語っている。

---留学から帰り、多変数解析函数論を専攻することに決めてから間もなく、一九三四年だったが、ベンケ、ツーレンの共著の「多変数解析函数について」がドイツで出版された。これはこの分野での詳細な文献目録で、特に一九二九年ごろからあとの論文は細大もらさ

ずあげてあった。これを丸善から取り寄せて読んだところ、自分の開拓すべき土地の現状が箱庭式にはっきりと展望でき、特に三つの中心的な問題が未解決のまま残されていることがわかったので、これに取り組みたくなった。（『春宵十話』、毎日新聞社、p.34）

これによれば、岡潔はベンケとトゥルレンの著作『多変数解析関数について』の中に「三つの問題群の作る山嶽」（岡潔『昭和への遺書』、月刊ペン社、p.111）を発見し、そこにライフワークのための土地を定めたのである。三つの問題とはクザンの問題、近似の問題、それにハルトークスの逆問題であり、これらの問題が有機的に結び合わされて形成する山嶽の頂点に位置するものこそ、ほかならぬハルトークスの逆問題なのであった。すると岡潔の言葉は明晰このうえもないと言わなければならず、ハルトークスの逆問題の出処もまた明白であるかのようである。ところが、実際にベンケとトゥルレンの著作をひもとくと、岡潔の言う「三つの中心的な問題」はあるやなきやというふうであり、さながら雲をつかもうとするようなとりとめのなさである。この書物は確かに多変

複関数論の現況を簡潔に描写してはいるが、何かしら特定の視点のもとに価値判断を行なって、歩むべき道を指し示しているというわけではない。種々雑多な問題群の萌芽は認められても、中心的な諸問題というものが特記されているわけではない。そうして何にもまして困惑させられることには、クザンの問題と近似の問題こそ萌してはいるものの、ハルトークスの逆問題に至ってはその名すらも登場しないのである。なるほどレヴィの問題はある。だが、その対象は境界が C^2-級という特殊な形状の領域に限定されていて、ハルトークスの逆問題の場合のような完全な一般性を備えてはいないのである。では、岡潔はベンケとトゥルレンの書物の中に何を見たのであろうか。これが私の第二の疑問である。

私はこれらの二つの疑問を解決するべく、ベンケとトゥルレンの著作を「詳細な文献目録」のように思いなして、かつて岡潔がそうしたであろうように、諸文献を読み進めた。この数学史的究明の結果はこんなふうである。レヴィの問題の起源から始めよう。ベンケとトゥルレンの著作にはハルトークスの逆問題は見あたらないが、同じくハルトークスの名を冠する連続性定理は書き留めら

れている。これは多変数解析関数の特異点が孤立しえないこと、従って特異点集合は必然的に連続体を形成する（それが「連続性定理」という呼称の由来である）ことを主張する定理だが、眼目は、その孤立しないという状勢の特異な表現様式にある。実際、ハルトークスの連続性定理が描写する特異点集合の特異な形状は、補集合に移行するとき、正則領域の属性としてのある特異な凸性、すなわち擬凸性を我々に教えるであろう。E.E.レヴィがまず初めに気づいたように、ハルトークスの連続性定理には擬凸状領域の概念が潜在しているのである。ハルトークスの発見を受けて、E.E.レヴィは特にC^2−級の境界をもつ領域$\{\varphi<0\}$の補集合$\{\varphi\geq 0\}$に対してハルトークスの連続性定理を忠実に適用し、この集合が解析関数の特異点集合であるために定義関数φが満足するべき条件を究明した。するとただちにレヴィ擬凸性の概念が獲得され、C^2−級の境界をもつ正則領域はレヴィ擬凸状であることが判明する。そうしてE.E.レヴィはなお一歩を進めて逆問題へと身を移し、強い意味でのレヴィ擬凸状領域は局所的には正則領域であることを証明した。では、そのような領域は、局所的のみならず、大域的にもなお

正則領域でありうるであろうか。これがレヴィの問題である。

だが、岡潔はレヴィの問題そのものを即物的に取り上げたのではない。そうではなくて、岡潔はE.E.レヴィの研究を導いた基本精神を洞察し、E.E.レヴィがそうしたように、ハルトークスの連続性定理から独自の仕方で擬凸性概念を汲み取ったのである。E.E.レヴィの場合に比して、岡潔の流儀ははるかに根源的だった。岡潔は無条件でハルトークスの連続性定理に向かい、そこに現われている幾何学的状勢を純粋な形で取り出して描写した。するとそのとき、レヴィ擬凸性を包摂する究極の擬凸性概念が発見されたのである。こうして今やいっさいが明らかである。レヴィ擬凸性に基づく逆問題がレヴィの問題と呼ばれたように、まさしくそのように、岡潔はみずから発見した擬凸性概念の基盤の上に新たな逆問題を提示して、それを正しくハルトークスの逆問題と命名したのであった。

ハルトークスからE.E.レヴィへ。ハルトークスから岡潔へ。これらの二本の基線から成る複線的連鎖こそ、多変数関数論形成史の論理的構造の核心である。私の二つ

の疑問はこうして解決されたのである。

2. ハルトークスの逆問題の根底にあるもの――リーマンと岡潔

岡潔の言葉の中にはなおもう一つの解きがたい謎が現われている。既述のように、ベンケとトゥルレンの著作の中には価値判断の痕跡は全く認められない。ところが岡潔はハルトークスの逆問題をもって多変数関数論の中心問題とみなしたのであるから、岡潔の場合には確かにある特定の立場からの価値判断が表明されているのである。では、その基準はいかなるものであろうか。我々はハルトークスの逆問題の解決という出来事の本当の意味をどこに求めたらよいのであろうか。岡潔の理論の本質はこの論理的実証性を超越した問いの中に潜んでいるのである。

私はこんなふうに答えたいと思う。岡潔の理論の根底にあってそれを統べている基本精神の淵源。それはリーマンである、というふうに。実際、岡潔の理論には、「母なる大地、その上にこそはじめて諸関数が生育し繁茂し

うる大地』（ワイル『リーマン面』、田村二郎訳、岩波書店、p.ix）が存在するという、解析関数論におけるリーマンの基本理念が生き生きと脈打っている。今、この理念に従うならば、我々はまず解析関数の存在領域たるべき場所を純粋に幾何学的な仕方で描出し、しかる後に、我々の描写が正鵠を射ていることを確認するために、そのような場所において解析関数の存在定理を証明しなければならないであろう。リーマン自身は一変数解析関数の存在領域としてリーマン面を提示した。そこで岡潔はこのリーマンの基本理念を直接継承し、多変数解析関数の存在領域を問う問いに対して擬凸状領域をもって答えたのであった。リーマンから岡潔へと続く簡明な一線。それが多変数関数論の根底に横たわる本質的連鎖の中核である。

3. 虚数乗法論の三つの相——歴史、理論的性格、本質的意味——

虚数乗法論における論理的連鎖と本質的連鎖の乖離については、すでに「ドイツ数学史の構想（上）（下）」（数セ

ミ、1989年1,2月号）および『ガウスの遺産と継承者たち』(海鳴社）において詳述したので、ここでは要点の摘記にとどめたいと思う。

歴史

[ガウス] ガウスの数論的世界には、虚数乗法論に関連して二つの著しい出来事が現われている。まずガウスは大著『アリトメティカの探究』第七章「円周の等分を定義する方程式」の序文の中でレムニスケート関数の等分理論の成立を予言して、虚数乗法論への道を指し示した。次に、ガウスは円周等分の理論の中に平方剰余相互法則の証明原理を発見した。

[アーベル] ガウスの予言を受けて、アーベルはアーベル方程式論の基盤の上にレムニスケート関数の等分理論を展開した。虚数乗法論はここに実際に開幕したのである。この理論はレムニスケート関数がガウス数体の元を虚数乗法にもつという基礎的認識に支えられて成立するが、アーベルはさらに歩を進めて、一般に虚数乗法をもつ楕円関数を考察した。そのような楕円関数の虚数乗法子とモジュールはいずれも任意ではありえない。すなわ

ち前者はある虚二次数体に所属し、後者はその虚二次数体上のある代数方程式――特異モジュラー方程式――を満足する。さらに、アーベルは特異モジュラー方程式の代数的可解性をも正しく認識した。

[クロネッカー] アーベルの一連の発見を受けて、クロネッカーは、特異モジュラー方程式は単に代数的に可解であるばかりではなく、対応する虚二次数体上のアーベル方程式であることを発見した。また、虚二次数体Kの元を虚数乗法にもつ楕円関数$\varphi(u)$の、K内の虚二次整数に関する周期等分方程式は$K(\mu)$（μは$\varphi(u)$のモジュール）上のアーベル方程式である（この事実はクロネッカーによると思われるが、私はまだ確認していない）。

[アイゼンシュタイン] アイゼンシュタインはレムニスケート関数の等分理論の中に四次剰余相互法則の証明原理を発見した。これはガウスの発見の延長線上に位置づけられるべき出来事である。

理論的性格

アーベルの究明はクロネッカーの発見をまって完結した。クロネッカーはこのような状勢のもとで「最愛の青

春の夢」を提示したのであるから、純粋に論理的な視点から見る限り、クロネッカーの青春の夢はアーベルの逆問題ともいうべき論理的性格を備えている。それ故、ガウス、アーベル、クロネッカーは一筋に連なって、虚数乗法論の論理的連鎖を形成するのである。

本質的意味

こうしてアーベルの理論はクロネッカーの青春の夢の唯一の理論的源泉である。だが、クロネッカーはアイゼンシュタインの理論が成功した理由をアーベルのアーベル方程式論の中に見いだそうとしたのであるから、青春の夢の本質はアーベルではなくてアイゼンシュタインの理論に宿っている。ガウスからアイゼンシュタインを経てクロネッカーへと至る道。これが虚数乗法論の本質的連鎖である。