リーとキリング・カルタンの構造概念

杉浦光夫（津田塾大）

§1　19世紀における構造概念の展開

19世紀の数学では、式や図形に関する量の単なる計算から一歩踏み出した考察が見られる。そのような研究も多様であって、例えば幾何学の概念の根本的変革にまで到った非ユークリッド幾何のようなものもある。ここでは広い意味での構造的なものの追求が次第に成長して行くことに注目したい。ポンスレやジェルゴンヌの射影幾何学特に双対原理や、デデキントによる代数体の整数論研究、アーベル、ヤコビ、リーマンによる代数函数の研究などに筆者はこの構造的なものの芽生えを見出すのであるが、こゝでは群論における構造概念の展開過程を概観し、本論の対象である初期のリー群論における構造概念の発展の記述に対する準備としよう。

群論の前史としては、ラグランジュの方程式論(1770年)[16]における置換の研究がある。ガウスの『数論考究』

(1801年)〔6〕では，群という言葉こそ用いられてないが，群論的な色彩がかなり濃厚である。特にそこでは有限巡回群が重要な役割を演ずる。法 m での剰余環 $\mathbb{Z}/(m)$ の加法群が m 次巡回群の基本的モデルであるが、素数 p に対する $\mathbb{Z}/(p)$ の乗法群が位数 $p-1$ の巡回群となることが合同式の理論の基本であり，その生成元（いわゆる原始根）は，ガウスの円分方程式論でも基本的な役割を演ずる。ガウスは二次形式の理論ではもう一歩踏みだす。与えられた判別式 D を持つ整係数原始二元二次形式の類に対し，ガウスは合成と呼ばれる積を定義する。これは整数 m と n を表わす二つの二次形式から，積 mn を表わす二次形式を構成する操作である。そしてガウスはこの積によって，二次形式の類が可換群を作ることを，面倒な計算によって克明に証明している。この可換群は一般にはもはや巡回群とは限らない。この群 G の中で平方類の作る部分群 H による各剰余類が，ガウスが種と呼んだものに一致する。そして剰余群は $(2, 2, \cdots 2)$ 型アーベル群となる。従って各種はいくつかの位数2の指標の値で定義される。ガウスはこのように指標で種を定義したのである。従ってそこでは「すべての指標の値が1とな

る種（principal genus）は平方類からなる」という命題が基本定理となる。以上が種の理論の群論的な構造である。数論的には種の理論は、二次形式による整数の表現問題を変換問題に帰着させて一応解決した後、それを別の面から考察するためにガウスが導入したものである。特に各種が一つの類から成るときは、素数pが二次形式$f(x,y)$で表わされるかどうかは$p \bmod D$の値によって定まる。またガウスは種の理論の応用として、平方剰余の相互法則の第二証明を与えることに成功したのであった。

ガウスの流れを継いだ研究者の一人がアーベルである。アーベルは、ガウスが「円分方程式論と同様の結果が$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$に関連する函数に対しても成立つ」という註に示唆されて、楕円函数の一般等分方程式がQに母数と周期等分値を添加した体の上で代数的に可解であることを発見したのであった。その根拠は、今日の言葉で言えばそのガロア群が可換群であるという事実に他ならない。[1] これによってアーベル方程式、アーベル群という言葉が生じた。さらにアーベル[2]は虚数乗法を持つ楕円函数の母数（いわゆる特異モデュール）が、乗法子を含む虚

二次体K上の代数方程式をみたし、しかもこの方程式が代数的に可解であることを発見した。(室原[11],高瀬[26])

クロネッカーが指摘したように、この方程式は、K上のアーベル方程式なのである。アーベルはこれらの楕円函数についての研究を行う以前に、一般5次方程式が代数的に可解でないことの証明に成功していたが、さらに進んで代数的に可解な方程式をすべて求めるという問題を取り上げた。しかし彼の早すぎる死のため、この仕事は完成されないままとなった。

この仕事を受継いだガロア[5]は、始めて群という言葉を導入し、代数方程式の根の置換で特別な性質をみたすものとして、今日その方程式のガロア群と呼ばれるものを明確に定義し存在を証明した。そしてガロアは、この方程式から導かれる補助的な代数方程式(例えば判別式の平方根を根とする方程式)の根を添加したとき、ガロア群がどれだけ縮小するかを考察する。こうしてガロアは方程式の代数的解法に即してガロア群の考察を行い、その過程で自然に、部分群，正規部分群，組成列などに導かれたのである。そして方程式が代数的に可解であるための必要十分条件は、そのガロア群Gの組成列

$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_n=\{1\}$ ですべての G_i/G_{i+1} が素数位数となるものを持つことであるという認識に到達した。[5] ジョルダンは、その『置換群』[10](1870)において組成列の概念を明確に定式化し、ガロアの条件をみたす有限群に、可解群という名称を与えた。またガロアは、分解不能群という名で(有限)単純群の概念を導入し、素数位数でない最小の単純群は、位数60(5次交代群 A_5)であることを指摘している。

ガロアの仕事は、1846年リューヴィルによって発表され、ベッチ, デーデキント, セレ等ガロア理論を理解する人も増えて行った。ジョルダンの『置換論』は、この動きを促進した。以上がリーが登場する前後までの群論の形成過程についてのごく概略的な記述である。

§2 リー

リー(1842−1899)の論文に群が登場するのは、1869年ベルリンでクライン(1849−1925)に会って後のことである。リーはクラインとの共通の関心の的であったプリュッカーの直線幾何学の一つの問題に可換連続群を用いた。これは与えられた四面体の四つの面(の延長)と

の四交点の作る複比が一定であるような直線全体の集合（四面体稜またはReye's line complex）についての研究[17]で、リーは四面体の四頂点を固定する射影変換全体の作る可換群（射影変換群のカルタン部分群）を用いて、この四面体稜の性質を系統的に説明することに成功したのであった。クラインとの共著の次の研究[13]では、やはり　可換連続群が重要な役割を演じている。またそこではこの群の無限小変換も導入されている。さらに注目すべきことには、「以下の可換な変換の群（gesschlossenes System）についての考察は、置換の理論とそれに伴う代数方程式の理論の研究と密接な関係がある」と述べて居り、彼等はガロア理論と自分達の理論の類似を認識して居たのである。「けれどもこの二つの場合には、また非常に大きな相違が存在する。我々の場合には、連続変数の量を扱うのに対して、置換論では常に離散変数だけが問題になる」と述べて、連続群と有限群の相違に注意しながら，この間の類似性を指摘した点は特に興味のある所である。

この共同研究の後クラインは、エルランゲン・プログラム（1872）の構想を固めて行くのに対し、リーは幾

何学の問題の中で出会った接触変換と一階偏微分方程式の解法の問題に取組むことになる。こうして変換群を用いての幾何学と微分方程式の研究を続ける内に、リーにとって次才にその大きな研究目標として、次の二つの問題I, IIが意識されるようになって行った。

I　n次元空間に作用する有限次元連続変換群をすべて求めよ。(変数及び径数の変数変換で移り合う二つの群（相似な群）は同じものと見なす)

II　置換群が代数方程式の理論で果したと類似の役割を果す理論を、連続変換群と微分方程式に対して構成せよ。

この二つの大問題に対し、リーは部分的にしか解答を与えることが出来なかった。けれどもこの二つの問題はリーの生涯における研究の原動力となったという点で重視されるべきものである。

問題Iについては、リーは $n=1, 2, 3$ の場合の解を得た。特に $n=1$ の場合，群は三種類だけ存在し，平行移動群（$x'=x+a$），アフィン変換群（$x'=ax+b$），射影変換群（$x'=(ax+b)/(cx+d)$）に対応する。幾何学的意義の明快なこの解を研究の初期（1874年）に得

たことがリーが変換群論に本格的に取組むための大きな刺戟となったのであった[18]。

問題Ⅱについては、接触変換を用いての一階偏微分方程式の解法の研究が最も重要なリーの仕事であるが、よりガロア理論的なものとしては、求積法で解ける常微分方程式の研究があり、リーは例えばリッカチ方程式が求積法では解けないことを、この立場から示した([20])。この方向の研究はピカール・ヴェシオの線型常微分方程式のガロア理論として結実した(ピカール[23])。後にこの理論は、導作用素(微分)を持つ体のガロア理論として抽象化された(コルチン[14], [15])。リーはまた組成列の考えから、方程式の解法は単純群をガロア群とする方程式の解法に帰着すると考えた。この見地からリーは単純群を重視し、射影変換群 $PGL(n, \mathbb{C})$ 及び直交群 $O(n, \mathbb{C})$ (のリー環)が単純であることを証明し、後さらに斜交群 $Sp(n, \mathbb{C})$ の単純であることも発見した。(cf. [19] 第三巻)

このようにリーは、その研究目標とした問題Ⅰ, Ⅱに対し、多くの研究を行ったが、リーの最も重要な成果は、これらの個々の研究ではなく、有限次元連続変換群に対

し、その無限小変換という概念を正確に定式化し、今日の言葉で言えば、変換群とその無限小変換の作るリー環とが一対一に対応することを、三つの基本定理によって確立した点にある。この三つの基本定理はいづれも順定理と逆定理とからなる。その内容を以下述べるが、特に解析的にその中心となる第二基本定理とその証明には、彼の一階偏微分方程式の研究が生かされている。

リーの言う有限次元連続群Gとは、r個の径数（パラメタ）$a_1, \cdots, a_r$によって定められる、n次元空間（$\mathbb{R}^n$または$\mathbb{C}^n$の開集合，その座標を$x_1, \cdots, x_n$とする）の変換

(1) $$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n ; a_1, \cdots a_r) \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

の集合で，合成および逆変換をとることで閉じているものである。そして函数f_iは解析的と仮定されている（これは十分な階数（例えばC^3級）だけ微分可能ならばよい）以下では径数には無駄がないとする。このときリーの基本定理は，次のように述べられる[19] I, III。

第一基本定理　変換（1）を定義する函数f_iは，次の形の偏微分方程式（2）をみたす。

(2) $\dfrac{\partial f_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{r} \xi_{kj}(f(x,a))\psi_{kj}(a)$, $\quad (1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq r)$

ここで行列 $(\xi_{kj}(f(x,a))$ の階数は min (n, r) であり，$\det(\psi_{kj}(a)) \neq 0$ である。逆に (2) の形の偏微分方程式をみたす 函数 f_i によって定義される変換 (1) は，r 径数の連続変換群（芽）を定義する。

第二基本定理 r 次行列 (ψ_{kj}) に対し ${}^t(\psi_{kj})^{-1} = (\alpha_{kj})$ と置く。無限小変換

(3) $X_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad A_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\dfrac{\partial}{\partial a_j}$, $\quad (1 \leqq k \leqq r)$

から，括弧積 $[X, Y] = XY - YX$ を作るとき，r^3 個の<u>定数</u> c_{ij}^{k} ($1 \leqq i, j, k \leqq r$) が存在して

(4) $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k} X_k$ $\qquad$ (5) $[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k} A_k$

をみたす。逆に一次独立な r 個の無限小変換 X_i $(1 \leqq i \leqq r)$ が定数 c_{ij}^{k} により (4) の形の関係をみたすならば，この無限小変換から生成される r 個の一径数変換群は，r 径数変換群を生成する。

第三基本定理 第二基本定理の定数系 $(c_{ij}^{k})_{1 \leqq i,j,k \leqq r}$ は，次の関係式 (6) (7) をみたす。

(6) $\quad C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0 \qquad (1 \leq i, j, k, l, m \leq r)$

(7) $\quad \sum_{l=1}^{r} \left(C_{il}^m C_{jk}^l + C_{kl}^m C_{ij}^l + C_{jl}^m C_{ki}^l \right) = 0$ (ヤコビの等式)

逆に(6)(7)をみたす任意の定数系$(C_{ij}^k)_{1 \leq i,j,k \leq r}$に対して(4)をみたす$r$個の無限小変換$(X_k)_{1 \leq k \leq r}$が存在する。(従って対応する$r$径数連続変換群が存在する。)

第二基本定理は、無限小変換$(X_i)_{1 \leq i \leq r}$(あるいは$(A_i)_{1 \leq i \leq r}$)の一次結合の全体$\mathfrak{g}$が、括弧積に関して閉じて居ることを述べて居り、第三基本定理は、$\mathfrak{g}$が今日の言葉でリー環(ワイル[27]の造語(1923))を作っていることを述べている。

この三つの基本定理により、リーは有限次元連続変換群に関する問題を、すべて無限小変換に関する問題に還元することに成功したのである。今日の観点からするとリーは局所的な考察に初めから限定していたので、変換群(正確には変換群芽または局所変換群)と、無限小変換の間の一対一対応を確立できたのであった。これは共変函手の最初の例ということができよう。今日から見ると無限小変換に移ることによる最大の利点は、それによって問題が線型化する点にある。我々の考察の対象であ

る群の構造についても、この線型化は新しい見方を与えることになったのである。

これまで有限群の構造の研究は、代数方程式の解法に密着した組成列に即して行われ、可解群や単純群の概念もそこから生れた。しかしそこでは未だ構造という概念は明確に意識されて居らず、意識的に定式化されてもいなかった。これに対しリーは、上述の基本定理によって、変換群が構造定数系 $(c_{ij}^{k})_{1\leq i,j,k\leq r}$ によって定まることを明確に認識し、数学の術語として（恐らく）始めて、「構造」という言葉を定義した。リーは「構造」に対し、ラテン語由来の Struktur でなく Zusammensetzung という即物的なドイツ語を用いた（これは定着せず今日ではドイツ語でも Struktur を用いる）。『連続変換群の理論』第一巻（1888），[19]，p.289 で，リーは (5) の定数系 $(c_{ij}^{k})_{1\leq i,j,k\leq r}$ によって，群 G にどんな（連続）部分群が存在するかが定まることを注意した後，次のように述べる：「そこで定数系 c_{iks} はそれ自身既に群 $X_1f, \cdots, X_rf$ のある種の性質を反映していることがわかる。これらの性質の総体に我々は特別な名前をつけることにし，それを群の構造と呼ぶ。従って関係式

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f$$

における定数系 c_{iks} は、r 径数群 $X_1 f, \cdots, X_r f$ の構造を定めるという。」

続いてリーは、二つの変換群 G, G' は、適当な座標に関する無限小変換の間の構造定数が一致するとき、同型（*gleichzusammengesetzt* または *holoedrische isomorph*）であると定義した。

また対応が一対一でない場合の多重同型（*meroedrische isomorph*）の概念も導入した。これらは、ジョルダンが置換群に対して用いていたものを、リー群（環）に転用したのである。

こうして、リーは無限小変換による線型化によって、連続変換群の構造をリー環の構造に帰着させ、後者を構造定数という形で可視化したのであった。こうして組成列を通じて漠然と考えられていた群の構造は、明確に対象化されて把握されることになった。構造定数 $(c_{ij}^{k})_{1 \leq i,j,k \leq r}$ の中には、（局所的な）連続変換群を完全に決定する情報が入っているのであるが、その情報を系統的に取出す一般的な手法を、リーは遂に開発することがなかった。そのような手法への展望を開いたのは、キリングの論文

（[12]（1888－1890）であった。キリング・カルタンによって半単純リー群の構造論,表現論がリー群論の主流となり，微分方程式のガロア理論の建設というリーの目標は廃んでしまった。しかし近年この方面への興味が復活しつつある。ポマレ[24]，オルヴァー[22]等を参照。

§3 キリング

前節で今日から見れば無限小変換へ移ることの最大の利点は、問題が線型化することにあると述べたが，リーが線型化のために無限小変換を考えたとは言えないであらう。リーは変換の変数及び径数に関する依存性を調べるために、解析学の定石に従って変数及び径数に関して微分することにより，無限小変換に到達した。線型化はその結果として生じたのである。いずれにせよ，リーは線型化の利点を部分的にしか生かせなかった。この点に関し注意しなければならないのは、1870年代は正に線型代数の形成期であり，今日のようにその知識は数学者の常識とはなっていなかったという事情である。変換群の構造は構造定数（c_{ij}^{k}）で定まるという認識にリー

は到達したが、それは彼の三基本定理に基づき、究極的には微分方程式の解の存在定理による結果であった。しかしこのような一般論だけからは、個個の群に対して、詳しい構造を知ることは不可能であった。

この点に関し突破口となったのが、無限小変換Xの随伴表現 $\mathrm{ad}X : Y \longrightarrow [X, Y]$ がジョルダン標準形となるように、無限小変換達（リー環）の基底をとるというキリングのアイディアであった。キリングは1860年代の終りにベルリン大学でワイヤストラスの講義を聞き、当時できたばかりの行列の単因子やジョルダン標準形の理論を知り、二次曲面束に関する学位論文でこの理論を利用したのであった。その後ブラウンズベックという田舎のギムナジウム教師として奉職しながら、キリングは適当な条件をみたすすべての幾何学を得るという研究計画を抱いた。そのためキリングはリーと独立に連続変換群を考え、その無限小変換を導入し、それらがリーの第二、第三基本定理をみたすことを発見していた。こうしてキリングは今日の言葉で言えばすべての有限次元リー環を数え上げることを目標として考えるようになった。その後キリングは、クラインに教えられてリーの仕事を知り

リーの協力者エンゲルと文通するようになった。孤立した環境にあったキリングにとって，エンゲルのもたらす情報は貴重であった。現代的な言葉でキリングの仕事[12]を述べれば次のようになる。複素数体$\mathbb{C}$上のr次元リー環$\mathfrak{g}$の元$X=\sum_{i=1}^{r} e_i X_i$（$X_1, \cdots, X_r$は$\mathfrak{g}$の基底）に対し，$\mathrm{ad}\,X$の固有多項式

$$\Delta(\omega)=\det(\mathrm{ad}X-\omega 1)=(-1)^r(\omega^r-\psi_1(e)\omega^{r-1}+\psi_2(e)\omega^{r-2}-\cdots\pm\psi_{r-k}(e)\omega^k)$$

を考える。ここでkは$\psi_{r-k}(e)\neq 0$となる最大の整数で今日$\mathfrak{g}$の階数と呼ばれるものである。（キリングの階数の定義はこれと異り，$\Delta(\omega)$の係数$\psi_i(e)$をすべて多項式として表わし得るeの多項式$P_1(e), \cdots, P_l(e)$の最小数lのことである。）いま$\psi_{r-k}(e)\neq 0$となる$e=(e_1, \cdots, e_r)$に対するX（いわゆる正則元）を考える。これに対し$\mathrm{ad}X$の固有値αに対する一般固有空間を$\mathfrak{g}_\alpha$とする。特に$\alpha=0$に対し

$$\mathfrak{g}_0=\{Y\in\mathfrak{g} \mid (\exists n\in\mathbb{N})((\mathrm{ad}X)^n Y=0)\}$$

である。$\mathfrak{g}_0$はキリング階数0の（即ち冪零）リー環となる。このとき，キリングは次の三つの仮定I. II, IIIの下での$\mathfrak{g}$の構造を研究した。

I. $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

II. $\mathfrak{g}_0$ は可換である

III. 0でない（$\Delta(w)$の）ルートはすべて単根である。

キリングは、四部作の論文「有限次元連続変換群の構造 I—IV［12］のIIにおいて、ルート α, β に対して、$\beta+k\alpha$ が $-q\leqq k\leqq p$ となる整数に対しまたルートとなるような最大の整数を $p, q\geqq 0$ とし

$$a_{\alpha\beta}=p-q$$

という整数（今日言うカルタン整数 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ に負号をつけたもの）を考察した。$\mathfrak{g}$ の階数が k のとき、k 個のルート $w_1,\cdots,w_k$ が存在して、他のルートはこれらの一次結合になる。今 $a_{ij}=a_{w_i w_j}$ とおく。この整数系（a_{ij}）は非常に特別な性質を持つ。例えば

$$a_{ij}\,a_{ji}=0,1,2,3$$

$$a_{ij}=0 \iff a_{ji}=0$$

である。このことから可能な整数系（a_{ij}）を決定することはそれ程難しくない。特に $\mathfrak{g}$ が単純な場合には、カルタン行列（a_{ij}）が低次元のカルタン行列の直和に分解しない。キリングはそのような整数系には、彼がA, B, C, Dと名づけた四個の無限系列と六個の孤立したもの

(E_k ($k=4, 6, 7, 8$), F_4, G_2 (キリングはⅡCと記している)) だけが可能であることを見出した。(実はE_4 (キリングはⅣEと記す) はF_4と同型であることを後にE. カルタン[4]が注意した) これは複素数体上の単純リー環として可能なものがこれだけに限られることを意味する。そしてキリングはリーが単純性を証明していた $PSL(n, \mathbb{C})$, $SO(2n+1, \mathbb{C})$, $SO(2n, \mathbb{C})$ のリー環のカルタン整数系が A_{n-1}, B_n, D_n となることを見出している。他の (a_{ij}) に対するリー環の構成も試みているが不完全である。またより基本的な問題として、キリングは上の仮定Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ の下に研究を行ったのでこれで単純リー環の分類ができたというためには、任意の単純リー環が仮定Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ をみたすことを示さなければならない。そのことをキリングは[12]Ⅲで試みているが、その証明は不完全であった。(次節を見よ) しかしとにかくキリングはそれまで誰も可能とは考えていなかった単純リー環の分類について、(少なくとも仮定Ⅱ, Ⅲをみたす) 単純リー環は定まった型のものしかないことを示したのである。これは予想外の結果であり、この方面に関心のある研究者に大きな衝撃を与えた。単純代数系の分類が可能であるこ

とを始めて示した点で，このキリングの仕事は数学史上画期的である。より簡単な複素数体上の単純多元環の分類も，キリングの仕事の影響下にモーリエン[21]によって1891年になされたのであった。組成列に基づく群の構造の研究は自然であるのに対し，リーの構造定数で構造が定まるという視点は，一見機械的のように見えた。所がキリングのように適当な方法で調べれば構造定数は非常に詳しい情報を与えてくれることがわかったのである。特に単純群に対しては組成列は自明なものになり，それからは何の情報も取出せないのに対し，キリングの方法が単純群に対し決定的な情報をもたらしたことは注目すべき出来事であった。

さらにキリングは，単純でないリー環の構造も考えた。彼は単純リー環の直和として，半単純リー環を導入し $g=[g,g]$ をみたす任意のリー環は，半単純部分リー環とキリング階数0イデアル（根基）の直和となると考えた。即ち後のレヴィの定理を $g=[g,g]$ の場合に考えたのであった。

また，キリングは根基が可換な場合のリー環の構造を調べている。このとき彼が導入した Nebenwurzel は，今

日の言葉で言えば表現の weight に外ならない。こうしてキリングは表現論に対しても先鞭をつけたのである。キリングの論文[12]については、ホーキンズの詳しい研究[7]がある。

§4 カルタン

リー群（と言っているが実はリー環）の構造論に関し概念的には、E. カルタン（1869－1951）の学位論文[4]は、キリングの延長線上にある。　ただし、キリングでは単純リー環と冪零リー環が中心なのに対し、カルタンでは半単純リー環と可解リー環が中心になっている。カルタンはキリングの条件Iをもはやつけず一般のリー環を考察しているのである。またキリングのように特別な場合に証明して、一般の場合も同じとするような論法をとらず、確実な証明が与えられている。

前節に述べたように、キリングは条件I, II, IIIの下で単純リー環の分類を行った。従って彼の結果で単純環の分類ができたと主張するためには、単純環はI, II, IIIをみたすことを示さなければならない。キリングは彼の論文

の皿でこれを行っている。単純環の分類という目覚しい成果に感銘を受けたF.エンゲル[1861－1941]は、この論文を詳しく検討し、証明の不十分な所を発見したのでキリングに問い合わせた。これに対するキリングの返答は論文の繰返しであったので、エンゲルはこの論文を検討するゼミナールを開いた。そしてウムラウフに階数0のリー環の構造を調べることを課題とした。ウムラウフは、エンゲルのアイディアに従って階数0のリー環は冪零であることを証明し、低次元冪零リー環で同型でないものを数え上げた。この作業の間に、ウムラウフはキリングが階数0のリー環に対して証明した一つの命題([12] I, p. 287) の反例を見出した。この命題を、キリングは単純環が条件Ⅱをみたすことの証明で本質的に用いているのである。この外にもキリングの命題で誤ったものがあり、キリングの分類論は始めからやり直すことが必要となった。エンゲル達は、キリングの証明の誤りを発見したが、正しい証明を発見することはできなかったのである。カルタンは、ライプツィヒに留学した友達のトレスからこれらの事情を聞き、この方面の研究に乗出したのであった。

カルタンは、その学位論文[4](1894)においてリー環$\mathfrak{g}$の逐次の導来環を、$\mathfrak{D}^{(1)}\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\mathfrak{D}^{(n+1)}\mathfrak{g}=[\mathfrak{D}^{(n)}\mathfrak{g},\mathfrak{D}^{(n)}\mathfrak{g}]$によって定義し、ある自然数$n$に対し$\mathfrak{D}^{(n)}\mathfrak{g}=\{0\}$となるとき$\mathfrak{g}$を<u>可解</u>(integrable)と呼び、リー環$\mathfrak{g}$が可解イデアル$\neq\{0\}$を含まないとき、<u>半単純</u>という。またリー環$\mathfrak{g}$が、$\mathfrak{g}$と$\{0\}$以外にイデアルを持たずかつ$\dim\mathfrak{g}>1$のとき、$\mathfrak{g}$を単純という。このときカルタンは、一般元$ad\,X$の固有多項式$\Delta(\omega)$のω^{r-2}の係数であるeの二次形式$\psi_2(e)$が正則であることが、$\mathfrak{g}$が半単純であるための必要十分条件であるという基本定理を証明した。この半単純性に関する判定条件から、半単純リー環は、単純リー環であるイデアルの直和になることと、キリングの条件II, IIIをみたすことが導かれる。キリングでは、半単純とは単純リー環の直和というに過ぎなかったが、カルタンはこの判定条件によって、半単純性の構造的な本質を把握したのである。さらにカルタンは、キリングの単純リー環の表においてIVEとIVFと記されたものは同型であることを示し、結局複素単純リー環は四つの無限系列をなす典型リー環A_n $(n\geqq1)$, B_n $(n\geqq2)$, C_n $(n\geqq3)$, D_n $(n\geqq4)$と五個の例外リー環E_n $(n=6,7,8)$

F_4, G_2 でつくされることを証明したのであった。カルタンは，これらの単純リー環の構造定数を与えているが，それらがヤコビの等式 (7) をみたすことの検証はしていない。リーによって群が具体的に与えられている典型リー環は問題ないが、例外リー環については存在についての問題が残る。しかしカルタンは変換群として各単純群を構成したようである。[3]にその記述がある。例えば「E_8は29次元空間の接触変換群として実現される」とあるが、それ以上の詳しい説明はない。後にシュヴァレー，ハリッシ・チャンドラ，セール [24] 等により任意のルート系に対し，それをルート系とする半単純リー環が存在することが証明された。

カルタンは後さらに，半単純環の既約表現の決定（1913)，実単純リー環の分類（1914)，対称リーマン空間論（1920－34）等の重要な研究を行い，以後のリー群論研究のレールを敷いた。これらはすべて学位論文における半単純リー環の構造論と単純リー環の分類が基礎になっている。

以上の歴史を通観して見ると，リーの連続変換群の理論は，置換群と代数方程式の理論をモデルとしたにも拘

らず、それとかなり異なる方向に発達して行ったことがわかる。代数方程式の代数的解法の観点からすると、組成列が基本で、群としては可解群が中心になる。リーは連続群に対し、その無限小変換を導入した。これは今日の言葉で言えばリー環を考えることに当る。リー環に対しても、組成列及び可解、単純等の概念を平行して定義できる。しかしリーが定義したように構造定数によって構造がきまるということは、要するにリー環の構造そのものを考えるということである。この立場は、組成列を考えるより精密なことを要求する。組成列だけでなく、群(またはリー環)の拡大の(G/HとHからGをもとめる)問題を解かなければリーの意味の構造はわからないからである。リーは自己の導入した構造概念を十分展開することはできなかったが、それを行ったのが、キリング・カルタンのルートの理論であった。こうして複素半単純リー環の構造は、ルート系によって見事に記述されることがわかり、リー群論は半単純リー群論(構造論と表現論)中心に発展することになった。

この様にリー群の構造論は、リーとキリングにおいて二度曲り角を曲ったのである。その結果として結実した

キリング・カルタンの複素単純リー環の分類論は、単純代数系の分類として最初のものであり、構造論が数学として美しい内容を持ち得ることを実証した。リーの無限小変換、キリング・カルタンのルートはその威力を十分に発揮したのである。

文 献

[1] N.H.Abel, Recherches sur les fonctions elliptiques, Crelle's J. 2(1827),101-181, 3(1928),160-190. (Oeuvres t.I,262-388.)

[2] N.H.Abel,Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques, Astr. Nachr. 138 (1828), (Oeuvres t.I,403-428)

[3] E.Cartan, Über einfachen Transformationsgruppen, Lepz. Ber. 1893,395-420. (Oeuvres I,vol.1,107-132)

[4] E.Cartan, Sur les structures des groupes de trans-fromations finis et continus, These, Nony, Paris, 1894. (Oeuvres I,vol.I,137-287)

[5] E.Galois, Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, J. Math. pures et appl.11(1846), 381-444.

[6] C.F.Gauss, Disquisitiones Arthmeticae,Fleischer, Leipzig, 1801. (Werke Bd.I, Engl. transl. Yale Univ. Press 1965)

[7] T.Hawkins, Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras, Arch. History of Exact Sci. 26(1982),127-192.

[8] T.Hawkins, Line geometry, Differential equations and the birth of Lie's theory of groups, in "The History of Modern Mathematics", 1989, 275-327, Acad.Press, Boston.

[9] D.A.Howe, The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Kline, ibid. 209-273.

[10] C.Jordan, Traité des Subsitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[11] 笠原乾吉, モジュラー方程式について, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報1(1991)

[12] W.Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I-IV, Math.Ann. 31(1988),252-290, 33(1988),1-48, 34(1989),57-122, 36(1890),161-189.

[13] F.Klein und S.Lie, Über diejenigen ebenen Kurven welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, Math.Ann.4(1871), 50-84.

[14] E.R.Kolchin, Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, Ann. of Math.49(1948),1-42.

[15] E.R.Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Acad. Press, New York, 1973.

[16] J.L.Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Nouv.Mém.Acad. Berlin, pour les années 1770/71, Berlin 1772/73. (Oeuvres t. 3, 203-421)

[17] S.Lie, Über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes, Gött.Nachr. 1870,53-66.(Ges.Abh.1,68-77)

[18] S.Lie, Über Gruppen von Transformationen, Gött.Nachr. 1874,529-542. (Ges.Abh.Bd. 5, 1-8)

[19] S.Lie, Theorie der Transformationsgruppen,I-III, Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

[20] S.Lie und G.Scheffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, Teubner, Leipzig, 1893.

[21] Th.Molien, Über Systeme höherer komplexer Zahlen, Math.Ann.41(1893),83-156.

[22] P.J.Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, New York, 1986.

[23] E.Picard, Traité d'Analyse t. III,Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[24] J.F.Pommaret, Differential Galois Theory, Acad.Press, New York, 1973.

[25] J.P.Serre, Algèbres de Lie semisimples complexes, Benjamin, New York, 1966.

[26] 高瀬正仁, ガウスの遺産と継承者たち－ドイツ数学史の構想, 海鳴社, 1990.

[27] H.Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Springer, Berlin, 1923.

[28] H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I-III, Math.Zeits. 23(1925),271-309, 24(1926),328-376, 377-395, 789-791.