書評

高瀬正仁著　『ガウスの遺産と継承者たち
ドイツ数学史の構想』
（海鳴社）

杉浦光夫（津田塾大）

本書の主題は、「ガウスの数論の本質は何か」という問題である。

この問題を考えるため、著者はガウスの数論に関する著作を詳しく調べると共に、フェルマからアルティンに到る数論史上の重要論文を殆どすべて読破した。その間十年近い月日が経っている。このような研究に基づいて得られた著者の考察の核心を語ったのが本書である。従って小冊子であるがその密度は極めて大きい。

上の問題に対する著者の答えは、次の三点に要約できる。

1．ガウスの数論の中心は、相互法則にある。

2．ガウスはあらゆる次数の冪剰余相互法則に対して、何かしら超越的な証明原理の存在を予感していたのではあるまいか (p.57)。

3．ガウスの数論の本質は高次冪剰余相互法則や類体論の確立ということそれ自体の中にではなく、微分方程式とアーベル方程式と相互法則が三位一体となって織りなす有機体、「緑にかがやく三つ葉のクローバー」の根底にあるものに触れて心からうなずきたいと願う切実な願いの中に宿っているのである (p. 127)。

2，3は著者以外の誰もが言わなかったユニークな意見である。1は多くの人も認めていることであるが、著者のとらえ方には独自のものがある。著者は Disquisitiones Arithmeticae（以下 D.A. と記す）の序文にあるガウスの次の言葉を出発点とする。「1795年の初めのころ（中略）、私はゆくりなくもあるすばらしいアリトメ

ティカの真理に出会ったのだった（私が思い違いをしているのでなければ、それは第108節の定理［第一補充法則］だった）。私はそれをそれ自身としてもこのうえもなく美しいと思ったが、そればかりでなく、その他のいっそうすばらしい数々の真理とも関連しているような気がした。そこで私は全力を傾けて、その真理が依拠している諸原理を洞察して、その厳密な証明を獲得しようと努めた。やがて私はついに望みどおりにそれに成功したが、そのころにはこれらの研究の魅力の数々にすっかりとりつかれてしまっていて、もう立ち去ることはできなかった。こうして一つの真理はいつでももう一つの真理への道を開くというふうで、この書物の初めの四章［1. 数の合同、2．一次合同式、3．冪剰余、4．2次合同式］で報告されている事柄は大部分、他の幾何学者たちの類似の研究成果を多少とも目に留める前に仕上げられたのだった。」(p. 47).

こうしてガウスの数論は、第一補充法則を出発点として展開したのであるが、高瀬氏はゲーテの「原植物」のイデーを転用して、次のように述べる。「ガウスは原相互法則ともいうべきものを発見して、多種多様の相互法則の織り成す世界の全容を一望のもとに視圏に捉えたのであった。原相互法則の発見。それが平方剰余相互法則の第一補充法則という「あるすばらしいアリトメティカの真理」の発見という出来事の本質である。」(p. 54).

このように著者は、ガウスが初めから平方剰余に限らず高次剰余の相互法則も視野に入れていたと主張する。

さらに著者は、ガウスの数論全体の中での相互法則の位置について次のように言う。「ガウスの数論的世界では、二次形式論も円周等分の理論もレムニスケート等分の理論もみな相互法則との関わりの中で初めて本当の意味が明らかになるのであり、まさしくそれ故に、それらは全体として一つの生きた有機体となって我々の眼

前に現われるのである。」(p. 66). この著者の意見は、ガウスの数論における相互法則の位置という点で、重要な点をついて居り、共感する点も多いが若干の疑問もある。一つはレムニスケートの理論は、ガウスにおいては等分論までで、相互法則には結びつけられて居らず、それをしたのはアイゼンシュタインだという点である。もう一つは、二次形式論は、種の理論によって相互法則の第二証明を与えるなど相互法則と関連はあるが、元来は独立した数学的実体ではないかという点である。またガウスは二元の他に三元の二次形式も考えており、代数的整数論とは異なる二次形式の数論もガウス（とラグランジュ）を祖とする数論の流れなのである。このようなガウスの数論の広がりは、著者の一点集中主義ではとらえきれないように思われる。

2について著者は、「ガウスの与えた平方剰余相互法則の七通りの証明のうち第四、第六、第七証明の証明原理はいずれも円周等分の理論に根ざしている。」ことを注意して、「平方剰余相互法則の証明原理の中には確かに超越的な契機が秘められていて、我々はだれしも、『アリトメティカの探究』を越えて上記の三証明を目の当たりにしたときに初めて、この真に本質的な事実に気づいてしみじみと心を打たれることであろう。」(p. 56)と述べている。ここはもう少し説明が欲しい所である。他の証明は有理整数の性質のみを用いた純数論的なものであるから、その方がより本質的であるとする見方も有り得るからである。

もう一つの問題は、円分整数を用いることが果たして超越的かという点である。円分整数は、指数関数という超越関数の等分値から生ずるという点で超越的と考えられるが、一方指数関数 $\exp(2\pi iz)$ の n 等分値は、代数方程式 $x^n - 1 = 0$ の根でもあって代数的な量でもある。円分整数にはどこまで行ってもこの両義性がつきまとうのである。

結局ガウスの数論で純粋に超越的なのは、レムニスケート函数の理論だけではなかろうか。しかし上述のようにガウスがここで相互法則まで達していたという証據はない。

数論と超越的なものとの関連が明らかになるのは、ガウスより一世代後のアーベル、ヤコビ、アイゼンシュタイン達によってである。本書 101 - 126 ページに述べられているように、アーベルは、楕円函数の等分論、虚数乗法論を展開し、アイゼンシュタインはレムニスケート函数の虚数乗法を用いる、4次剰余相互法則の証明を与えたのであった。

3の「微分方程式とアーベル方程式と相互法則の三位一体」という状況は、このアーベル、アイゼンシュタイン、ヤコビの仕事を総合すると浮かび上がって来るものである。ガウス自身のレムニスケート函数の理論には微分方程式は登場しない。従って3における「ガウスの数論の本質」という言葉は、これらの直接の継承者によって明らかになった「ガウスの数論の本質」という意味だと思われる。この点で、ガウス自身の述べていることと、他の史料による推定は、区別したほうが説得力が増すのではなかろうか。

ガウス自身による史料が不十分なので、他の史料によらざるを得ないのは事実である。この場合アイゼンシュタインやヤコビのような、同時代人の仕事が重要になってくる。私も3次および4次の相互法則に関する限り、ガウス自身の考えも、この二人のものにかなり近いものであったと考えている。著者も p. 83 で述べているように、ガウスが平方剰余相互法則の証明を七通りも考えたのは、3次及び4次剰余の相互法則の証明の手掛かりを発見するためであった。そのような趣旨を述べた序文をもつ論文が与えたガウスの証明の一つは、ガウスの和を用いるものであるから、これを用いてガウスが3次及び4次の相互法則の証明ができるかどうか試みた

ことは、ほぼ確かだといってよい。ガウスがアイゼンシュタインを高く評価したことは、アイゼンシュタインの数論がガウスの数論を正しく受け継いでいることを示すかのように思われる。

その後が問題である。著者はここに二つの流れを見る。「ガウスの数論は、相互法則究明という指導理念のもとに、大きく二方向に分岐しつつ展開していった。一つの流れは、類体論というみごとな果実の結実とともに完結し、これによって冪剰余相互法則は完全に任意な表現様式を獲得した。」(p.126). これに続いて3の文章が来て、その後著者は次のように述べる。「この願いからガウスの数論のもう一つの流れが現われて、アーベル、アイゼンシュタインを経てクロネッカーへと継承されていった。それ故、この流れこそ、我々のドイツ数学史の本流である。」(p.127).

第一の流れを傍流とする理由を著者は次のように述べる。「ガウスの理念の本質は単に相互法則の確立というそのこと自体にあるわけではなく、我々はその証明原理に内在する何かしら超越的な契機を明るみに出さなければならないのであった。上記の流れはなるほど確かに大洋に流入して大団円をみた洋々たる大河だが、そこにはこの解明に向かおうとする意図が先天的に欠けている。そのために、それはなお全体として傍流の位置に甘んじているのである。」(p.76).

また著者は、ドイツ数学史の主流はクロネッカーで終ったと考えているようである。ヘッケ以下のヒルベルトの第十二問題の研究者達も、問題は連続しているが、ガウスの数論の直接の継承者達を扱うドイツ数学史には含まれないという趣旨のことを著者から私は聞いている。

ただし著者は、このドイツ数学史の主流には、「豊かな鉱脈が未開発のまま眠っている」(p.127) とする。そしてその鉱脈について、次のように述べる。「こうしてアーベル積分論の中には確かに、ドイツ数学史の原型、あの「緑にかがやく三つ葉

のクローバー」が見え隠れしているように私には思われる。もしそれを正しく取り出すことができたとするならば、そのとき我々のドイツ数学史は、大きな完成へと向かうべく、堅固な第一ベースキャンプを確保したと考えられるのである。」(p.128). この予想については、この方面の研究者でない評者はそのような理論が実際に現われるまでは判断を留保せざるを得ない。

この予想の部分を除き、ガウスの数論の本質を探究した数学史の本として本書を眺めて見よう。ガウスの数論と言った場合には、私はやはり二次形式の理論が実体的に大きな部分を占めて居ると考える。D.A. における二次形式の理論は、極めてアルゴリズミックであり、超越的なものは用いられていない。従って著者のように、「相互法則の証明における超越的契機」をガウスの数論の本質と見る見方とは一定の距離を置かざるを得ない。勿論レムニスケート函数にみられるように、ガウスの数論が超越的なものにも開かれていたことは確かであり、著者のいう「ドイツ数学史の本流」が、ガウスの数論の極めて興味のある発展であることには、私も異議がない。要はバランスの問題であって、著者の立場がガウスの数論の大切な所をとらえていることは確かであるが、それだけではないという思いが私にはどうしても残るのである。

本書を最初読んだときには、私は非常に大きな抵抗を感じたのであった。ドイツにおける数学研究のごく一部分であるものを指して「ドイツ数学史」と呼ぶような著者の独特の言葉づかいに先ず引っかかったのである。しかしそれはむしろ表面的なことである。より実質的な抵抗感の原因として、著者は現代数学を判断の基準にしてはいないということが挙げられる。現代数学の中で創造せざるを得ない現場の数学者にとっては、これが非常に問題になるのである。数学者がその仕事の場で現代数学から離れることは困難であるが、数学史を考えるときには、一応それを棚上

げして、ガウスならガウスの時代に帰って考える想像力が必要とされる。そうでなければ、ガウスが問題にしたのは何かを考えるとき、現代的に興味のある部分のみが大きく写った歪んだ像しか得られない。現代数学に固執しなければ、著者の立場は、はるかに理解し易くなるように思われる。勿論その場合でもいろいろ異論の余地はあるが、著者との対話はずっとスムースに行くであろう。

本書は無難な教科書ではなく、独自の主張を強く押し出した論争的な書物である。著者の挑戦に答えて、学問的な論争が起こることを期待する。