デデキントの数論について

三宅　克哉（名古屋大　教養）

1. ランダウはデデキントの追悼講演 [L] のなかで，次の三つを彼の主要な業績として上げている：『連続性と無理数』（[De 2]），『数は何であり何であるべきか？』（[De 3]）および『ディリクレの数論講義への補足』（[De 4-6]等）．これらはすべて「数」に関するものである；また前二者は独創性において，「イデアル論」で代表される最後のものを確かに凌駕する．しかしここでは，この最後のものを含めたデデキントの「代数的数論」における業績についての二，三の注意を，それも高木-アルティンの類体論に直接に関連する文脈にあるものを述べるにとどまる．従って，例えば [De 12] での η 関数の考察に現われる，いわゆる「デデキント和」についても，またヴェーバーとの共著になる「代数関数」についての興味深い論文 [D-W] にも触れることはしない．

デデキントは，ガウスに倣った訳でもないのだろうが，理論的な枠組みが明快になるまでは何も公表しないのが通例であったように見受けられる．従って彼が実際に何を見，何を意図していたのかを，整った論文のなかに見いだすことは容易ではない．代数的数論については，特に『ディリクレの数論講義への補足』の最終版 [De 6] の完成度が高く，しかも [De 4]，[De 8]，[De 5]，[De 6] と順を追って成熟していく様子を見ることができることもあって，この [De 6] こそが彼の最終目的であったと見做されるかもしれない．しかし彼の代数的数論における「研究計画」は，「体」，「代数的整数」，「モデュール」，「オーダー」，「イデアル」等の概念の抽出と，それによる代数的数論の基礎づ

けにとどまるものでなく，はっきりした数論の問題に動機づけられていたものと思われる．特に高木-アルティンの類体論に結実する歴史的な文脈のなかに見るとき，この問題意識に根ざして現われるデデキントの影響を浮かび上がらせることができるのではなかろうか．このノートはかかる試みのひとつである．

2. アルティンが 1924 年に彼の一般相互法則を公表するまでの仕事は，その L-関数の論文を含めて三編 [A 1 - 3] を数えるに過ぎない．学位論文 [A 1] は有限素体 上の一変数有理関数体の２次拡大体の数論を展開したもので，合同ゼータ関数を導入して初めて本格的に研究したものとしてもよく知られている．また [A 2] は，有限次代数体の拡大 K/k に対するデデキントのゼータ関数の比 $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ が全平面で正則であるかを，ある種の非アーベル拡大について検証したものである．次いで [A 3] では，一般に $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ を自然な「L-関数」の積に分解するという問題が取り上げられ，フロベニウスの群指標によってアルティンの L-関数が導入される；そして特に K/k がアーベル拡大の場合に，新しい分解が，高木の類体論から導かれる $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ のヴェーバーの L-関数による積表示と自然に一致すべきであるとして，アルティンの相互法則が宣言される．

さて我々の興味は，これら [A 1] と [A 2] がデデキントの論文 [De 7] と [De 14] のそれぞれに直接に動機づけられている点にある．もし我々が数学史に数学上のアイデアの連鎖を見ようとするならば，デデキントがどのような問題意識を持ってこれらの仕事を為したかを探る必要があろう．

なお高木もこのデデキント [De 14] の非アーベル的な内容に興味をもち，[T 2] でそこに上げられた予想に証明を与えている．しかも自身の類体論（[T 1]）を用いて羃剰余の相互法則に踏み込んだ取り組みを見せて（[T 3]）アルティン

にも強く影響を与えたが，彼自身がアルティンの相互法則そのものを予想として定式化していたかどうかは，おおいにありそうなことであるとはいえ，まったく不明である．

3．デデキントの1857年に出版された論文 [De 7] は有限素体上の一変数多項式環における因子論である．論文の冒頭にガウス，ガロア，セレ，シェネマンの名が上げてあるが，直接の動機を与えたのは恐らくガウス [G] であろう．これは遅れて1863年に出版されたガウス全集IIに手書き遺稿のひとつとして収められてあり，デデキントの注釈が添えられているが，デデキントは [De 7] の脚注でこれに言及している；セクション番号が冒頭の330から始まって375まで付けられており，『数論講究』の一部として用意されたが割愛されたものである．ガウスはここで，有限素体上の多項式の根を，いわゆるフロベニウス同型写像との関係のもとで考察している．一方デデキント [De 7] では，有限素体上の一変数多項式環が**有理整数環とのアナロジー**のもとで取り扱われており，多項式を法とする合同関係が主題である．とくに「素多項式（eine (irreduktibel Function oder) Primfunktion）」による合同関係からは素体の有限次拡大が得られ，フェルマの小定理の拡張が示される；またこの環における「平方剰余の相互法則」が２次拡大を用いて示されている．従ってここでは，先達，例えばシェネマン [S] とは全く異質な数論の展望が切り開かれている．とはいっても，それを受け継ぐものを見るには60余年を待たなければならなかったようである．

4．論文 [De 7] ではデデキントはクムマーの理想数についての仕事（[Ku 1,2]）には全く触れていない．しかし代数的数論に関しての10年余の沈黙ののち，1871年に，ディリクレの『数論講義』第２版への補足の５節 [De 4] によって，

彼はこのクムマーの円分体における因子論を一般の代数的数体について展開した．因みにこの補足Xの5節は次の通りである：

§159. Endliche Körper;
§160. Ganze Algebraische Zahlen;
§161. Theorie der Moduln;
§162. Ganze Zahlen eines endlichen Körpers;
§163. Theorie der Ideale eines endlichen Körpers.

また，彼の言によるならば，この頃には特に純3次体（とそのガロア閉包）についての踏み込んだ考察を行なっており，そこからデデキントのゼータ関数，イデアルのガロア拡大における分解理論，代数的数体の判別式（Grundzahl ないし Discriminante）等を抽出したものと思われる(特に [De 11]，[De 13]，[De 14] の序文 を参照のこと)．彼が純3次体を取り上げた動機については不明であるが，これが彼を非アーベル的な方向へ誘ったことは確かであろう；あるいは，単なる仮説に過ぎないが，クムマー，クロネッカーに対して意識的に非アーベル的なものを目指して，最も簡単で自然な純3次体を取り上げたのかも知れない．

デデキントが純3次体 K についてはっきりと書き上げたかったもののひとつは，ディリクレ [Di1-3] にならった類数公式であった．そのために彼のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ を導入し，その $s=1$ での留数を求め，それが類数，判別式等で表示されることを見た（[De 9] では一般の代数体の一般のオーダーの類数が扱われている）．それを有限の形の類数公式とするためには，少なくとも，$\zeta_K(s)$ をリーマンのゼータ関数と何らかの「L-関数」の積として表す必要がある．しかし，後に出版された [De 14] に見るかぎり，そこにあるものがアルティン [A 2] によって平方因子を含まない次数のメタサイクリック拡大の場合に一般化されたとはいうものの，

デデキント自身が自分で納得できる一般性を直ちに抽出し得ていたとは思えない．ゼータ関数についての論文 [De 9] のあと，[De 10] では，まず [De 7] で見たもののうちの代数的数体にかかわるものをイデアル論によって整理しなおし，３次体の例を与えて説明するとともに，特に代数体の判別式について，一般にその素因数全体がちょうどその体で分岐する素数の全体と一致すること，即ち「デデキントの判別定理」を言明する．この定理の証明は [De 11] で与えられる．

５．しかし [De 11] が出版された 1882 年に書き上げられていたイデアルの分解理論 [De 13] は，なぜかこの時点では発表されなかった．1880 年，デデキントの友人フロベニウスはクロネッカーの論文 [Kr] に興味を惹かれ，イデアルの「クロネッカー式密度」に関する論文 [Fr 1] の草稿を纏めた．そしてそれとともに，その基礎として拠るべきイデアルの分解理論に関する質問をデデキントに宛てたが，[De 13] の草稿がフロベニウスの手元に届いたのは 1882 年であった．しかしその出版はさらに遅れて，結局 [De 13] が公刊されるまで据え置かれた（[De 13]，[De 15] および [Fr 1] を参照のこと）．デデキントが [De 13] の出版を遅らせた理由は不明である．（また彼がイデアルの分岐理論，いわゆるヒルベルト理論，に手を付けた形跡が見当たらないことも，今から見れば奇妙に思われる．）

それにもかかわらず，このあともデデキントはフロベニウスと文通を重ね，上に述べたような意味で好ましい「L-関数」を得るために不可欠と思われる非可換ガロア群の群指標を探求する．フロベニウスの群指標の理論 [Fr 2] に関するデデキントの影響はホーキンス [H 1,2] に詳しいのでここで立ち入ることはしない．（[M] をも参照のこと．）

かくしてあとは若きアルティンが時を得てその才能の翼を

のびやかに拡げるのを待つばかりとなる．

なおデデキントはリーマン全集を編集する際にヴェーバーと親交を結び，以来科学上の交遊を保ち，それは，例えば [D-W] に結実する．ヴェーバーの数論に関する興味はデデキントによってもたらされたものと見てよい（フライ [F] を参照のこと）；しかしデデキントのヴェーバーへの書簡は十分には残されておらず，ヴェーバーの類体論に関する仕事へのデデキントの影響を知る方途は，エミー・ネターの嘆息（ [De 1], II, p.400）以来見いだされていない．

文 献

[A1] E.Artin. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen I, II, Math. Zeitschrift 19(1924), 153-246 = Collected Papers, 1-94.

[A2] ______. Über die Zetafunctionen gewisser algebraischer Zahlkörper, Math. Ann.8 (1923), 147-156 = Collected Papers, 95-104.

[A3] ______. Über eine neue Art von L-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3(1924), 89-108 = Collected Papers, 105-124.

[De1] R.Dedekind. Gesammelte mathematische Werke I, II, III, Braunschweig, 1930-32. Reprint from Chelsea, New York, 1969.

[De2] ______. Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872; Aufl.2., 1892; Aufl.3., 1905.

[De3] ______. Was sind und was sollen die Zahlen ? Braunschweig, 1888; Aufl.2., 1893; Aufl.3., 1911.

[De4] ______. Supplement X. Über die Komposition der binären quadratischen Formen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G.Lejeune Dirichlet (2. Auflage), 423-462, (1871) = Werke III, 223-261.

[De5] _____. Supplement XI. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G.Lejeune Dirichlet (3. Auflage), 515–530, (1879) = Werke III, 297–313.

[De6] _____. Supplement XI. Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, von Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G.Lejeune Dirichlet (4.Auflage), 434–657, (1893). Reprint from Chelsea, New York, 1968.

[De7] _____. Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, Jour.reine angew.Math., Bd.54(1857), 1–26 = Werke I, 40–66.

[De8] _____. Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, Paris, Gauthier-Villars, 1877, 1–121, Bulletin des Sci. math. astron., 1er série, t.XI, 2e série, t.I, 1876, 1877 (= Werke III, 262–296).

[De9] _____. Über die Anzahl der Ideal-Klasse in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers, Festschrift Techn. Hochschule Braunschweig zur Säkularfeier des Geburtstages von C.F.Gauß, Braunschweig, 1877, 1–55 = Werke I, 105–157.

[De10] _____. Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen, Abh. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Bd.23(1878), 1–23 = Werke I, 202–230.

[De11] _____. Über die Discriminanten endlicher Körper, Abh. kgl. Ges. Wiss. Göttingen Bd.29(1882), 1–56 = Werke I, 351–396.

[De12] _____. Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann, B.Riemanns gesammelte math. Werke und wissenschaftlicher Nachlass, 2.Auflage, 1892, 466–478 = Werke

I, 159–172.

[De13] _____. Zur Theorie der Ideal, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1894, 272- 277 = Werke II, 43–48.

[De14] _____. Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern, Jour. reine angew. Math. Bd.121(1900), 40–123 = Werke II, 148–233.

[De15] _____. Aus Briefen an Frobenius, Werke II, 414–442.

[D-W] R.Dedekind und H.Weber. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Jour. reine angew. Math. Bd.92(1882), 181–290 = Werke[De1] I, 238 –349.

[Di1] P.G.Lejeune Dirichlet. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.18(1838), 259–274 = Werke I, 357–374.

[Di2] _____. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.19(1839), 324–369, Bd.21 (1840), 1–12 und 134–155 = Werke I, 411–196.

[Di3] _____. Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indetérminées complexes, Jour. reine angew. Math. Bd.24(1842), 291–371 = Werke I, 533 –618.

[E-E] W. and F. Ellison. Théorie des nombres, chap. V, in Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900 edited by J.Dieudonne, Paris, 1978; 上野他共訳，数学史 I，第五章，岩波書店，1985.

[F] G.Frei. Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory, in The History of Modern Mathematics, ed. by D.E.Rowe and J.McCleary, Academic Press, 1989.

[Fr1] G.Frobenius. Über Beziehungen zwischen Primzahlen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin(1896), 689-703 = Ges. Abh. II, 719-733.

[Fr2] _____. Über Gruppencharactere, Sitzungsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin(1896), 985-1021 = Ges. Abh. III, 1-37.

[G] C.F.Gauss. Disquisitiones Generales de Congruentiis. Analysis Residuorum Caput Octavum. Gauss Werke II, Göttingen, 1863, 212-242.

[H1] Th. Hawkins. The origins of the theory of group characters, Arch. history exact sci. 7(1970/71), 142-170.

[H2] _____. New light on Frobenius' creation of the theory of group characters, Arch. history exact sci. 12(1974), 217-243.

[Kr] L.Kronecker. Über die Irreductibilität von Gleichungen, Monatsb. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin (1880), 155-162 = Werke II, 83-93.

[Ku1] E.Kummer. Zur Theorie der complexen Zahlen, Monatber. kgl. preuss. Wiss. Berlin(1845), 87-96 = J. reine angew. Math. Bd.35(1847), 319-326 = Collected Papers I, 203-210.

[Ku2] _____. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complex Zahlen in ihre Primfactoren, Jour. reine angew. Math. Bd.35 (1847), 327-367 = Collected Papers I, 211-251.

[L] E.Landau. R.Dedekind. Gedächtnisrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der kgl. Ges. Wiss. Göttingen am 12. Mai 1917, Göttingen Nachr. 1917, 50-70.

[M] K.Miyake. A note on the arithmetic background to Frobenius' theory of group characters, Expo. Math. 7(1989), 347-358.

[S] Schönemann. Gründzuge einer allgemeinen Theorie der höhern Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist. Jour. reine angew. Math. Bd.31(1846), 269-325; Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. Jour. reine angew. Math. Bd.32(1846), 93-105.

[T1] T.Takagi. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Tokyo 41(1920), 1-133 = Collected Papers, 73-167.

[T2] _____. Sur les corps résolubles algébriquement, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des Sciences, Paris, t.171(1920), 1202-1205 = Collected Papers, 172-174.

[T3] _____. Ueber das Reciprocitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, J. Coll. Sci. Tokyo 44(1920), 1-50 = Collected Papers, 179-216.