p進解析の系譜

足立恒雄（早稲田大学　理工学部）

1.　付値の定義

p進解析の歴史をたどるために、予備知識としてまず付値の定義を振り返っておく。Kを（可換）体とし、vをKから実数体ℝへの写像とする。vが体Kの付値であるとは、次の条件が満足されることをいう：

(1)　$v(x) \geqq 0$；$v(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

(2)　$v(xy)=v(x)x(y)$

(3)　定数Cがあって、$v(x+y) \leqq C(v(x)+v(y))$

このように付値の定義を与え、付値を公理論的に取り扱ったのはKürschák[1]が最初である。通常はC＝1で定義されているが、上のように一般化して定義しておくと、付値の同値性が扱い易くなる。このことはArtin[2]で最初に指摘された。二つの付値v_1，v_2が同値であるとは、$v_2=v_1{}^c$を満たすような定数cが存在することをいう。これは付値から導入される体Kの位相が同じになることと言い換えられる。0の値は0とし、0以外の数に対する値はすべて1にすると一つの付値が得られるが、これを自明な付値という。自明でない付値の同値類を素点とよぶことにする。

有理数体における付値の例　vとして絶対値を採用すると、これは明らかに付値である；$v(x)=|x|$。絶対値の属する素点をp_∞で表すことにする（この記号は既にHenselによって使われている）。次に、pを任意の素数とする。0でない有理数は$p^n a/b$（nは整数、aとbは互いに素な整数）という形に表される。そこで$v_p(x)=p^{-n}$、また$v(0)=0$と定義すれば、v_pは有理数体の一つの付値を与える。v_pの属する素点をpで表す。素数と同じ記号であるが、混乱することはないであろう。このとき次の定理が成り立つ：

定理（Ostrowski [1]）有理数体の素点はp_∞、およびp（pは素数）で尽くされる。

この定理の、現在教科書で見られるような簡単な証明はArtin[2]によって与えられたものである。

体Kの付値vを用いて、Kの2元x，yの距離$d(x,y)$を$v(x-y)$で定義すれば、Kは位相体となる。Kのvによる完備化をK_vと記すことにする。Kとして有理数体ℚを取ると、p_∞による完備化はちょうど実数体ℝである。素点pによる完備化はp進体と呼ばれ$\mathbb{Q}_p$と記される。

2.　Hensel, Kurt (1861-1941)

WeilはKummer全集の序言（[1]、p.6）においてKummerがｐ進数に関して先駆的な仕事を成したことと、HilbertがBerichtにおいてKummerの業績をまとめあげる際にｐ進的な要素を抹殺してしまったことを指摘した。さらにｐ進解析の系譜に触れて、次のように述べている：

KroneckerはKummerのリーグニッツのギムナジウムにおける生徒であり、その後も終生賛美者であり、また友人であった。彼の1845年の円分体の単数に関する論文はKummerに刺激されたものであろう。HenselはKroneckerの学生で、彼を通じてKummerに近付いた。Hasseはｐ進数を数学の重要な部門として確立するのに最も功績があったと思われるが、彼はHenselの弟子で、マールブルクのHenselの下で学位論文を書いた。

ｐ進解析の歴史について誰の目にも触れる形で何かを書いたのはWeilの外にはHasseただ一人である。Hasseはこの話題に関して何度も書いている。まず、彼の著書Zahlentheorie([5])の序文の書き出しを紹介しよう：

代数的数論には、因子論とイデアル論という全く異なった入門の仕方がある。最初のは、KummerとKroneckerの算術的研究とWeierstrassの関数論的手法に基づくもので、今世紀初めにHenselによって開拓され、Steinitzが一般体論を用いて、また、Kürschák、Ostrowski達が一般付値論を用いて発展させた。第２の学習法はいくらか早く、Dedekindが考えつき、Hilbertがさらに開拓し、そしてEmmy Noether、Artin達が発展させた。

初めのうちはイデアル論的アプローチのほうが、より早く、より効率的に目的に達するばかりでなく、さらに進んだ数論の研究においても他方より有益であるので優れているように見えた。ますHilbert、ついでFurtwängler、高木がその土台の上に一般相互法則を含む類体論という堂々たる殿堂を築き上げたのに対し、Henselの側ではそのような進歩が認められなかったというのもそれに貢献している。しかしながら後になって、まず２次形式論、また多元環論において因子論的ないしは付値論的導入は、関数論においてよく知られたlocal-global relationを算術の世界に持ち込むことを可能にすることによって、算術的な構造法則をより簡単に、より自然に表現し得るばかりではなく、類体論と一般相互法則の真の意味がこの方法で明らかになるということが分かって来た。かくして今や秤は因子論的な導入のほうに有利に振れたのである。

Hasseのこの著書は数論における因子論的ないしは付値論的基礎付けの優

位を示すという目的を持っていることが本文中にも記されている。これらの文を読むとき、そこには何か深い情念の表出といったものが感じられるであろう。そういったものについてはHasseの項でもう一度触れよう。

HenselはKronecker流の形式論を用いて代数体の判別式の指数の研究を行ったことと、並びに1変数、2変数の代数関数論における研究業績で知られていた。1890年あたりからWeierstrassによる羃級数の方法を取り入れることによってKroneckerゆずりの代数体と関数体を共通に扱うという精神を一貫させる研究を始めたようである。かくして生まれたのがp進解析であった。その目的と意義についてHenselはどう考えていたか、まずHenselの著書[4]の前書きから見てみよう：

この著作の第1巻を公刊するまでには18年の研究を要したのであるが、有理関数と代数関数の研究に重要な成果を齎した現代関数論を最大限に利用するという観点に立って有理数と代数的数の理論を扱う。

初等算術は1800年代の初めころにGaussの『算術講究』で初めて組織化され、学問の位置にまで高められたのだが、ここでは素数が存在するという事実と各有理数が素数の積に一意的に表されるという命題が基本性質として前面に出て来た。Kummerによる代数的数の画期的研究に続いて、DedekindとKroneckerの研究はGaussによって指し示された道を真っすぐに進んだが、彼らの前にはこの高次の領域では素数による一意分解性の命題がもはや成り立たないという困難が待ち構えていた。こうして誕生したばかりの代数的数論の領域をこの基本定理が成り立つように組織的に拡張しなければならないという大変困難な、まずは解決不可能のように思われる問題の前に立たされたのである。最初に立ちはだかったこの難関をこれら3人の学者はそれぞれ独自の方法で克服したのであるが、各自の方法は彼らの最大の学問的業績であり、そしてその基礎に基づいて打ち立てられた高等算術という体系は前世紀後半における数学上の最も美しい成果であるといえよう。

有理関数の関数論的取り扱いにおいては、整関数は一意的に1次因子に分解されるというGaussによる代数学の基本定理があって、この事実を例えば有理および代数関数の性質の厳密な認識のために基本として用いようという希望も出て来る：これもしかし、1次因子$z-\alpha$は商$z-\alpha/z-\beta$と同様に一つの零点と一つの極を持つので、決して本来の素因子ではないので、最初から困難がある。そのかわり次のような事実がある：すべての有理及び代数関数はその領域の任意の座（Stelle）の近傍、即ち対応するリーマン面の点の近傍において対応する1次因子の整または分数指数を用いて羃級数に展

開し得、しかも各座には代数的に共役な冪級数のサイクルが対応する。そのような関数の間に成り立つ有理的な関係は、対応する関数要素によって置き換えても、任意の座の領域に対してやはり成り立つ。こうした土台に立って初めて、有理及び代数関数は極だけをもつ１価、ないし有限多価解析関数であるという高度に単純な認識に達し得る。他の結果はすべて、なかんずく関数の素因子への一意分解やこれらの最も単純な要素の超越的表現はこの基本的結果から比較的簡単に得られることである。

数論のこの問題に関する研究を始めて以来、関数論的方法は数論の分野に応用可能な筈であり、この土台の上に代数的数のより簡単な理論を構築出来るはずだと私は信じて来た。本著作においてはこの思想に基づく研究によってこの分野に楽に入門できるように努めた。この新しい数論の重要な成果は次のように要約される：

有理数の整除性に関する研究に際しては各素数ｐに一つの座が対応させられる；さらにもう一つの座が絶対値による数の考察に対応している。有理数はこれらの座に関して整係数の収束冪級数に展開される。有理数の間に成り立つ有理的関係は、これらの数を対応する冪級数に置き換えても成り立つ。

代数的数の分野にこの結果を拡張すると次のような結果を得る：γをｎ次の代数的数とする；体Ｋ(γ)の数を整除性に関して、その絶対値を扱うように研究するという課題を考える。ここでは各素数に一定数の座が、代数関数論において独立変数の有限の値 $z=\alpha$ にリーマン面の点が幾つか対応するのと全く同様に、対応する。体Ｋ(γ)のすべての数は次の性質を持つ；そのような座の領域に対してすべての数は、有理的あるいは代数的係数を持つ収束級数で表される。一つの同一の座には一般には複数のそのような冪級数、即ちお互いに共役な代数的展開のものが成すサイクル、が属する。任意の素数ｐに対して我々の体に属する代数的数は常にｎ個の相異なるそのような展開を持ち、これらはｐに属する座の数と同じだけのサイクルに分解する。これと全く同様な考察が絶対値に関する代数的数の研究に対しても成り立つ；実根と虚根のペアの数だけ異なる座が存在する。

また有理数と代数的数は各素数と絶対値に対して１価ないし有限多価であり、その展開は一定有限個数の座に対してだけ負冪で始まるという一般的定理が成り立つ；これから各代数的数は素因数の積として一意的に表せるという命題が従う。

任意個の代数的数の間に成り立つ有理係数の有理等式は、対応する級数で置き換えても成り立つ。こういう等式はそこに現れる数を複素数で考えるときの代数的命題が、素数に属する座に対してもこれらの数の間で成り立つこ

とを表している。この考えによって複素数上での命題と代数的数の整除性での命題との間の完全な並行性を示している。

最後に、どの点においてここで展開した代数的数の理論がさきに述べた素晴らしい理論に比べて単純になっているかを簡単に述べておきたい。一つの素数に属するｎ個の展開を分離し、それらだけを、あたかもリーマン面の各点の近傍で代数関数の一つの要素のように考察することができるので、代数的数に関する算術的命題のほとんどすべてを全く簡単に与えられる；他の理論では時折見通しがきかなくなるものだが、ここでは対応する等式、すなわちｎ個の共役な展開の全体を考察する必要がなくなり、従って終結式、判別式の算術的研究も不要になる。またほとんどすべての命題や関係の証明がまず個々の座の領域に対してはその正しさはほとんど自明であるということと、次いであらゆる座に対してそれが正しいことが示せるということによって簡易化される。最後に、代数的数論には体Ｋ(γ)についてある素数が例外となるために今まで克服し得なかった困難が生じ、その性質の究明のために特別の、多くの場合簡単ではない研究を要するということがしばしば起こる；そのような例外が概ね起こらないということはこの新理論の本質的な優越性を示していると思われる。

この前書きで注目されるのは、まずｐ進数が素元分解の一意性を回復することを主たる目的として開発されたという主張であろう。現在では、たとえば高木の『代数的整数論』では、イデアル論を基調とし、ｐ進解析は一つの道具として準備されることが多い。しかし発明者のHenselの意図は、Hasseもしきりに主張するように、イデアル論と対置されるような数論のより良き基本的概念を創出することにあったのである。ここでKroneckerの流れを汲むHenselとHasseは、Henselの場合は一度も、Hasseの場合は彼のBerichtにおいて類体論をまとめた時期を除いて、イデアルという言葉を用いたことがないというのは指摘しておく価値があろう。筆者はイデアルと因子とどちらが優れているかを論じるつもりは毛頭なく、ただ我々は自由にこれらを時に応じて使い分けているが、歴史的に見ると二つの対立した考え方であったということを指摘したいのである。それから、上の序文の最後の箇所を読むとHensel自身はlocal-global principle、いわゆるHasseの原理を発見することはできなかったけれども、それを予想、ないし期待していたのではないかと思われる。実際、この点についてHasseは明確に次のように述べている：

本全集の編集者はlocal-global principleを自分（Hasse）が考え出したというが、実は先生のHenselからヒントを頂いたものである。...マールブルクではHenselの本([5]のこと－筆者注)の最終章に書かれている２元の２次形式がある有理数を表せるためのｐ進的必要条件は十分条件でもあることを証明し、そして可能ならさらに変数の多い場合にもそれを拡張することになった。...しばらくしてラグランジュ還元が鍵になることを見付け、Dirichlet-Dedekindの§156-§157を用いてその証明に成功し、Henselに証明に成功したけれども、その証明はｐ進解析とはなじまないと手紙を書いた。Henselは

ｐ進解析になじまないというけれども、とにかく出来たわけで、大変喜ばしい。自分はいつもこんな考えを持っていた。すべての点で有理的な性質を持つ解析関数はそれ自身有理的である。それでは、すべてのｐとp_∞でｐ進的な数はそれ自身有理的か。

この最後の文章を読んで私の目から鱗が落ちた。ラグランジュの定理の条件は各ｐに対してｐ進的に0を表現出来ることを表しているのだ！ ここから必然的に、直ちに２次形式の表現と同値性に対するlocal-global principleが頭に浮かんだ。このように、この原理の発見は、そのほかのたくさんのものと同様、師であるHenselに負うものである。

上でラグランジュの定理と呼んでいるものは現在、通常ルジャンドルの定理（すなわち$ax^2+by^2+cz^2=0$が自明でない整数解を持つためには、a, b, cが同符号ではなく、-bc, -ca, -abがそれぞれa, b, cの平方剰余であることが必要十分である）といわれているもののことである。

Henselの数論に関する第２の著書[5]は1913年に出版された。この著書では代数体への応用ではなく、ｐ進数そのものの性質の研究が展開されているというのが特徴である。なかんずくｐ進指数関数、ｐ進対数関数などが定義され、その収束条件が論じられているのは重要な点であろう。Henselはｐ進数の応用として、自然対数の底ｅが超越数であることを証明しようとした。級数

$$e^p=\sum p^n/n!$$

がQ_pで収束することを利用しようとしたのである。このアイデアはうまくいかないことは今や初心者の目にも明らかであるが、当時は代数的閉包の考え方もはっきりしていなかったことに注意しなくてはならない。この逸話を[6]において紹介したHasseは、偉大な数学者によくあるように、失敗を礎にHenselは上述の級数を含むｐ進解析の研究へと導かれたのであると述べている。

このようなHenselの重要な研究は、今から思うと不思議なことだが、長い間一部の熱烈な信奉者を除いて数論の世界で正当に評価されなかった。1904年に

発表した論文[3]の冒頭には次のような文章が見られる：

算術において正の整数は、そしてこれらだけが天から与えられたものである；零、負の整数、分数、無理数、虚数は、すべての計算がうまくいくようにするためには、受け入れねばならない記号なのである。

ここには師のKroneckerの言葉との符合が見られおもしろい。同時に、この文章から、奇妙な数体系を導入したために一般に受け入れられあるのが難しかったかのような印象も受けるけれども、むしろHasseが言うように、初期のうちは数論に余り大きな応用が見いだせなかったというのが普及しなかった真の理由であろう。もちろん何の応用もなかったわけではない：たとえば、素羃因子 p^n を法とする乗法群の構造は Henselの方法で初めて決定されたものである。すなわち、ある数が十分高い羃を法としてｎ羃剰余であれば、局所体においてはｎ羃であることがここでは有効に使える。しかし、高木の『代数的整数論』ではこの定理を証明するためにだけｐ進解析（第10章　素数進法）が導入されていることを見れば、当時の数論界においてｐ進数の置かれた位置が良く理解されるであろう。

Henselの業績に最初に注目したのはSteinitzであった。1910年に発表されたSteinitzの大論文[1]には、Henselの発見した新しいタイプの体に刺激を受けたのが、体の一般論の研究を始めるきっかけとなったのだと記されている。それまでは複素数体とその部分体、そして関数体位しか体の持ち合わせがなかったのである。続いて第１節で述べたようにKürschákたちによる付値論の展開が見られる：ついでながら、付値（Bewertung），アルキメデス的といった用語はKürschákによって導入された。かくのごとくHenselの仕事はHasseが登場するまでは数論的な方面よりも新しい型の体（抽象体また位相体として）という観点から注目されたのであった。

3．Hasse, Helmut (1898-1979)

Hasse全集の序文をもう一度引用してみよう：

1920年にはゲッチンゲンにおける先生だったHeckeがハンブルク大学に移ってしまったので、研究をマールブルクのHenselの下で続けることにした。というのは1913年に発行された例の数論の書物（これをゲッチンゲンの古本屋で見付けて買った）は一目でとりわけ魅力に満ちており、研究に値すると思えたからである。しかし「大」ゲッチンゲンにとどまるほうがよいとRichard Courantは勧めてくれた。ｐ進数に関するHenselの本は実りの薄い脇道であるというの

である。しかしその本は魔術的な力を及ぼして、結局私は「小」マールブルクに行ってしまうことになった。マールブルクではHenselの本の最終章に書かれている２元の２次形式がある有理数を表せるためのｐ進的必要条件は十分条件でもあることを証明し、そして可能ならさらに変数の多い場合にもそれを拡張することになった。

そして第２節で引用したように、２次形式におけるHasseの定理([1])を発見するのである。さらに進んで二つの２次形式が有理同値であるためにはすべての素点において同値であることが必要十分であるという見事な定理の証明を得る([2])。これらにはMinkowski([1]、[2])による先駆的業績があるのだが、それとの関係はこの論文において十分明らかにされている。Dieudonné編『数学史』第Ｖ章では、ある整数を各素数の高い羃を法として表現出来れば、その整数は有理数を用いて表現できることをMinkowskiが証明したことになっているが、もしそうならHasseはMinkowskiの結果に自明な言い換えを行ったに過ぎないことになる。が、事実はそうではない。Minkowskiの得た有理同値に関する条件も、書き換えればHasseの得たinvariantsを用いた同値条件と同じになり、その条件にはlocal-global principleが適用できることをHasseが指摘したのである。

Hasseは1950年に至ってHenselの追悼文[6]を書いた。これを読むとHenselの経歴、Hasseとの関係、ｐ進体の生い立ちなどがよく分かるが、中でもｐ進体がなかなか受け入れられなかった経緯について述べた箇所は興味深いので以下に紹介してみよう（訳については彌永昌吉先生にお世話になった）：

そのころHenselのｐ進数を用いる方法が少数の心酔者の仲間にしか理解されず、一般に軽んぜられていたのは理解出来ないことではない。殊にゲッチンゲンではRiemannの影響が強く残っており、Weierstrassの考え方はそれほど重んぜられていなかった。代数的数論ではDedekindのイデアル論を用いるほうが確かに分かり易く、Hilbertとその門弟たちの手によりその方法で得られた一般類体論や相互法則などの結果は、そのときまでにHenselの方法で得られていた二、三の結果と比べると、余りに大きなものであった。Steinitzによる体の理論は一般によく知られていたが、Kürschák-Ostrowskiの付値論によってｐ進数を基礎付ける仕事は当時なされたばかりであった。２次形式論にｐ進数を用いる私の処女論文の結果や、それに続いて代数体における相互法則の明示公式について私の得た成果が知られるようになっても、Henselの方法がDedekindの方法と少なくとも同等の価値があることを一般に認めさせることは出来なかった。1922-25年頃私はArtinとｐ進数論の価値についてたびたび話し合ったが、彼は

はDedekindのイデアル論に入れ挙げていて、そのほうがずっと簡単で美しいといい、Henselのp進数に対してはゲッチンゲンの旧師たちと同じように哀れむかのように薄笑いを浮かべていた。私は上述の私自身の成果のほかに、次のことにも注目すべきではないかと言った。それは高等数論で問題となるのは、数の各元の乗法的な要素あるいは合同式の法として用いられる素因子とその冪が主であって、それらの積であるイデアルが用いられることはそれほどないので、基礎付けには素因子とその冪をまず構成する方が、基礎理論の最後になって初めて重要になるイデアルを最初から準備するよりも合理的であり、教育的にも良いのではないか、イデアル論的な行き方では、明示的に構成されたものではなく、概念的な形式的定義の与えられたものを扱わねばならず、学習者は初めはイデアル概念の範囲をはっきりと思い描くこともできないのではないか－こういった見方にもArtinはあまり意義を認めなかった。ずっと後に私が多元環論や類体論で大きな成功を収めてから、ArtinはようやくHenselの方法の優秀性を認め、彼自身p進数論の基礎付け（代数体の付値論）についての仕事もするようになったのである。

p進数論はさらに進歩を続けた。Hasseは類体論を応用して局所類体論を証明した([4])が、Chevalley([1])がこれに続いて、局所類体論を、類体論を援用せず、独立に証明することに成功した。さらにChevalleyが類体論において果たした重要な貢献を述べるためにHasseの類体論史[7]を引用しよう：

高木の類体論では相対アーベル体K/kの、対応するkにおける合同因子類群A/Hによる特徴付けに関して美的な点で欠陥があった。この欠陥は法mに関する一種の極限移行によるA/Hの近似A_m/H_mに由来している。p進の概念と手法が類体論に向けられた後、ChevalleyはWeber=高木の特徴付けをより滑らかなp進的特徴付けにおきかえるという幸せなアイデアを思い付いた。...かくしてlocal-global principleは類体論の中にしっかりと根を下ろしたと言うことができよう。

Chevalleyの“happy idea”というのはよく知られたようにイデール（idèle）のことである。これにより現在では、より易しい局所類体論をまず証明し、局所体を統合する形で全局の類体論の証明を構成するという道が取られるようになっている。なお、このidèleというのはideal èlementという、英語ともフランス語ともつかぬ言葉から作り出されたもので、この言葉を思い付いたのは外ならぬHasseであるという話を彌永先生から伺った。

文献

Artin, E.

[1] Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper, J. f. Math. (1932)

[2] Algebraic numbers and functions I, Princeton, 1950-51

Chevalley, C.

[1] Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. 2. (1933)

Hasse, H.

[1] Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, J. f. Math. 152 (1923)

[2] Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, J. f. Math. 152 (1923)

[3] Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zählkörper, J. f. Math. 153 (1924)

[4] Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen, J. f. Math. 162 (1930)

[5] Zahlentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1949

[6] Kurt Hensel zum Gedächtnis, J. f. Math. 187 (1950)

[7] History of Class Field Theory, in "Algebraic Number Theory" ed. by Cassels-Frölich, Academic Press, London, 1967

[8] "Geleitwort" in his "Mathematische Abhandlungen", Band 1, 1975

Hensel, K.

[1] Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 6 (1899)

[2] Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Math. Ann. 55 (1902)

[3] Neue Grundlagen der Arithmetik, J. f. Math. 127 (1904)

[4] Theorie der algebraischen Zahlen, Teubner, Leipzig/Berlin, 1908

[5] Zahlentheorie, Göschen, Berlin/Leipzig, 1913

[6] Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primdivisors, J. f. Math. 145 (1915)

[7] Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, J. f. Math. 146 (1916)

[8] Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für einige Primteilerpotenz als Modul J. f. Math. 147 (1917)

[9] Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Zeitschr. 2 (19

18)
[10] Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper, J. f. Math. 151 (1920)

Krull, W.
[1] Allgemeine Bewertungstheorie, J. f. Math. 167 (1932)

Kummer, E. E.
[1] Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitäts-gesetzen, J. f. Math. 44 (1852)

Kürschák, J.
[1] Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. f. Math. 142 (1913)

Minkowski, H.
[1] Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut national de France, 29 (1884)
[2] Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können, J. f. Math. 106 (1890)

Ostrowski, A.
[1] Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$, Acta Math. 41 (1918)

Steinitz, E.
[1] Algebraische Theorie der Körper, J. f. Math. 137 (1910)

Weil, A.
[1] "Introduction" to Kummer's "Collected Papers" Vol. 1, 1, 1975